

885
T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

TU Khiết

Sujet : Stabilisation des ondes de dérive par un champ magnétique
présentant un cisaillement des lignes de force.

Soutenue le 22 Décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

C. RIOUX

M. TROCHERIS } Examineurs

J. COSTE

G. LAVAL

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

par

TU Khiết

Sujet : Stabilisation des ondes de dérive par un champ magnétique
présentant un cisaillement des lignes de force.

Soutenue le 22 Décembre 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président

C. RIOUX

M. TROCHERIS } Examineurs

J. COSTE

G. LAVAL



Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.L.DELCROIX qui m'a accueilli au Laboratoire de Physique des Plasmas de la Faculté des Sciences d'Orsay et qui a bien voulu m'honorer en acceptant de présider mon Jury de Thèses.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur C.RIOUX et à Monsieur M.TROCHERIS, Chef du Département de la Physique des Plasmas et la Fusion Contrôlée au Commissariat à l'Energie Atomique à Fontenay-aux-Roses d'avoir bien voulu participer à la Commission d'Examen.

Monsieur J.COSTE m'a initié à la Physique des Plasmas et m'a guidé dans mes débuts de recherche. Je lui dois plus que des remerciements, ma reconnaissance profonde et sincère lui est ici exprimée.

Je remercie tout particulièrement Messieurs G.LAVAL et R.PELLAT de la section de Théorie des Gaz ionisés à Fontenay-aux-Roses pour l'aide active et sans réserve qu'ils m'ont apportée tout au long de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie également tout le personnel du Laboratoire qui m'a aidé dans la présentation de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : GENERALITES</u>	4
<u>CHAPITRE II : PLASMA A FAIBLE β DANS UN CHAMP MAGNETIQUE UNIFORME</u>	13
1. Equation de dispersion.....	14
Théorie locale.....	17
Théorie exacte.....	19
2. Caractéristiques principales des modes instables....	21
Modes résonnants.....	21
Modes fluides.....	24
3. Etude numérique.....	25
4. Conclusion.....	25
<u>CHAPITRE III : EFFET D'UN CISAILLEMENT SUR LA STABILISATION DES MODES NORMAUX</u>	27
1. Equation de dispersion.....	27
2. Méthode de résolution.....	29
3. Modes localisés.....	33
3.1. Limite des faibles cisaillements.....	33
A. Caractéristiques des modes instables....	36
B. Efficacité de la réduction.....	36
C. Critère de stabilité.....	37
D. Validité.....	39
3.2. Limite des forts cisaillements.....	40
4. Conclusion.....	49

<u>CHAPITRE IV</u> : INSTABILITES CONVECTIVES.....	50
1. Notions des instabilités convectives.....	50
2. Critère de stabilité.....	51
3. Conclusion.....	55
 <u>CHAPITRE V</u> : EQUATIONS DE LA TURBULENCE FAIBLE DANS UN SYSTEME INHOMOGENE.....	56
1. Mise en équation.....	57
2. Equation cinétique pour les nombres d'occupation..	65
3. Energie turbulente.....	68
 <u>CHAPITRE VI</u> : SPECTRE TURBULENT.....	71
1. Spectre stationnaire.....	71
1.1. Domaine $k_1^2 a^2 < 1$	72
1.2. Domaine $k_1^2 a^2 > 1$	79
2. Vérification de la faible turbulence.....	84
3. Coefficient de diffusion.....	85
 <u>CONCLUSION</u>	88
 <u>APPENDICE A</u> : INTEGRATION SUR LES TRAJECTOIRES.....	89
 <u>APPENDICE B</u> : CALCUL ITERATIF DES FLUCTUATIONS.....	94
 <u>APPENDICE C</u> : INTEGRATION SUR LES ANGLES.....	99
 <u>REFERENCES</u>	101

I N T R O D U C T I O N

L'instabilité de dérive qui constitue l'objet de notre étude présente depuis plusieurs années un grand intérêt tant sur la plan expérimental que sur le plan théorique. De nombreuses expériences ont en effet montré que la diffusion d'un plasma à travers les lignes de champ magnétique entraîne une perte de particules supérieure à celle prévue par les théories tenant compte des collisions. Cette diffusion anormale des particules du plasma, selon Bohm⁽¹⁾, est due à l'existence d'un champ électrique fluctuant dans le milieu causé par les instabilités. Parmi ces dernières, celle qui est susceptible de causer une perte importante du plasma est souvent celle qui engendre dans le milieu un champ électrique perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. L'instabilité de dérive qui appartient précisément à cette catégorie se développe dans les plasmas inhomogènes présentant un gradient de densité, or les plasmas obtenus en laboratoire sont toujours inhomogènes, cette instabilité est généralement tenue comme responsable des pertes observées et les théories qui lui sont consacrées ainsi que les travaux expérimentaux tendant à la mettre en évidence vont en croissant ces dernières années. L'histoire des instabilités de dérive débute avec le travail de Tserkovnikov⁽²⁾ mais le type d'instabilité étudié par cet auteur est quelque peu différent de celui que nous considérerons dans ce travail, néanmoins il a servi de point de départ de la théorie des ondes de dérive étudiée par plusieurs autres auteurs dont principalement de l'école russe, notamment les travaux de Rudakov, Sagdeev, Kadomtsev, Galeev, Mikhailovski⁽³⁻⁶⁾ consacrés au problème d'instabilité des modes de dérive en propagation oblique. De même, l'étude non-linéaire de ces modes a été entamée dans les travaux de Kadomtsev, Galeev et Rudakov ainsi que Galeev et Sagdeev⁽⁷⁻⁹⁾, toutefois les théories développées par ces auteurs ne se limitent qu'aux plasmas dont le rapport β entre les pressions cinétique et magnétique est très supérieur à celui entre les masses des deux espèces de particules constituant le plasma et le mécanisme

d'interaction non-linéaire évoqué dans ces théories ne permet pas de justifier l'existence possible d'un état de saturation des modes.

Expérimentalement les plasmas obtenus en laboratoire ont un très petit rapport β (typiquement de l'ordre 10^{-5}) et une étude spéciale pour cette catégorie s'impose, en effet le domaine d'instabilité qui, défini comme celui des modes ayant une vitesse de phase dans la direction du champ magnétique, comprise entre la vitesse thermique ionique et la vitesse d'Alfvén, dans le cas étudié par les auteurs russes représente un petit domaine, s'étend dans ce cas sur une large bande couvrant la vitesse thermique électronique si bien que les théories habituelles consistant à considérer les modes dans l'approximation résonnante (c'est à dire $v_i \ll v_{\text{phase}} \ll v_e$) ne sont pas capables de décrire correctement ceux qui ont une vitesse de phase supérieure ou de l'ordre de la vitesse thermique électronique.

Dans ce travail, après avoir présenté un bref aperçu sur les travaux antérieurs (chapitre I) nous considérerons la situation particulière des plasmas à faible β dans le cas d'un champ magnétique uniforme (chapitre II) où nous dégageons le caractère fortement instable des modes ayant une petite composante du vecteur d'onde dans la direction du champ magnétique (modes fluides). Pour éviter cet inconvénient, la solution souvent proposée est de donner au champ magnétique une petite composante dans la direction perpendiculaire au champ initial et à la direction de l'inhomogénéité. Dans un tel champ cisailé, une onde qui possède en un point une composante nulle du vecteur d'onde suivant la direction du champ magnétique local voit celle-ci augmentée en moyenne si bien que les instabilités fluides peuvent être éliminées pour peu que le cisaillement soit suffisamment fort. En raison de la variation spatiale de $k_{\parallel}(x)$, composante parallèle au champ magnétique du vecteur d'onde, l'analyse locale faite dans le cas d'un champ magnétique uniforme ne peut plus être justifiée, au chapitre III nous établissons l'équation de dispersion relative aux modes normaux tenant compte de la variation du gradient de la densité et de $k_{\parallel}(x)$. Cette équation se présente sous la forme d'une équation de Schrödinger à potentiel complexe que nous

analyserons grâce aux techniques B.K.W. dans le cas complexe et nous ferons la comparaison avec les autres théories notamment celles de Krall et Rosenbluth⁽¹⁰⁾ d'une part, Pearlstein et Berk⁽¹¹⁾ d'autre part et nous lèverons à ce propos la divergence entre les critères de stabilité vis à vis des modes normaux donnés par ces auteurs.

Les résultats obtenus dépendent essentiellement des valeurs relatives des rapports $\frac{M}{m}$, $\frac{r}{a}$, $\frac{L_s}{r}$ où M et m sont respectivement la masse des ions et des électrons, r la dimension caractéristique du plasma, a le rayon de Larmor des ions et L_s la longueur caractéristique du cisaillement. Les situations rencontrées sont les suivantes :

i) Dans le cas des systèmes fortement inhomogènes, c'est-à-dire $\frac{r}{a} < \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$, le critère de stabilité correct est celui de Krall et Rosenbluth et le cisaillement critique est donné par la formule $\frac{L_s}{r} = 2\sqrt{2} \frac{r}{a}$. Cependant pour de tels systèmes la stabilisation complète est très difficile à réaliser au point de vue expérimental mais nous montrons que pour ce cas le cisaillement reste une méthode efficace pour atténuer les instabilités. Nous montrons à ce propos que pour des valeurs du cisaillement telles que $\frac{L_s}{r} \gg 2\sqrt{2} \frac{r}{a}$ on peut obtenir une réduction notable du taux de croissance et nous avons fait un calcul numérique pour contrôler les résultats théoriques, ceci montre par exemple que pour les plasmas d'argon ($A = 40$) un cisaillement de l'ordre du dixième du cisaillement critique suffit pour amener le rapport $\frac{\gamma}{\omega}$ à une valeur inférieure à $\frac{1}{10}$.

ii) Dans le cas contraire où le rapport $\frac{r}{a}$ est grand, le cisaillement critique de Krall et Rosenbluth est formellement facile à atteindre mais nous montrons que même lorsque le cisaillement devient très supérieur à celui-ci, les modes normaux subsistent et restent encore instables si toutefois le rapport $\frac{L_s}{r}$ reste supérieur à une certaine valeur qui constituera le critère de stabilité de ces systèmes. Selon Pearlstein et Berk, celui-ci est donné par la formule :

$$\frac{L_s}{r} = \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$$

mais nous montrons que cette condition est simplement celle de la disparition des modes amortis car pour des valeurs plus faibles du cisaillement satisfaisant toutefois à la condition $\sqrt[3]{\frac{M}{m}} < \frac{L_s}{r} < \sqrt{\frac{M}{m}}$ les modes sont purement oscillants (fréquence purement réelle) si bien que le véritable critère de stabilité vis à vis des modes normaux pour les systèmes ayant un grand rapport $\frac{r}{a}$ est donné par la formule

$$\frac{L_s}{r} = \sqrt{\frac{M}{m}}$$

On obtient ainsi une condition moins sévère que celle de Pearlstein et Berk.

Dans le chapitre IV nous considérons plus particulièrement les systèmes appartenant à cette deuxième catégorie dans la situation des forts cisaillements où les modes normaux sont éventuellement amortis et nous examinons le problème d'un paquet d'onde défini comme une superposition des modes normaux ayant chacun une fréquence différente. Cette analyse se montre essentielle car le paquet d'onde qui initialement localisé en un point du système se propage à travers celui-ci, avant d'atteindre la région d'absorption par l'effet Landau des ions, risque d'être amplifié, en raison du caractère localement instable du système, à un niveau d'énergie qui peut être dangereux pour le confinement. Une nouvelle notion d'instabilité, dite convective est ainsi introduite. Les premiers travaux sur ce sujet sont ceux de Coppi, Laval, Pellat et Rosenbluth⁽¹²⁾ ainsi que ceux de Frieman et Rutherford⁽¹³⁾ et Davidson et Kammash⁽¹⁴⁾. En suivant l'approche donnée par les premiers auteurs, nous trouvons qu'en imposant au paquet d'onde de ne pas dépasser un nombre d'exponentiation de l'ordre de l'unité, le cisaillement minimum relatif à la stabilisation des paquets d'onde est donné par la formule

$$\frac{L_s}{r} = \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$$

qui est identique à celle donnée par Frieman et Rutherford.

Dans les deux chapitres suivants nous considérons les systèmes ayant un petit rapport $\frac{r}{a}$, insuffisamment stabilisés par un cisaillement modéré et nous faisons une analyse du spectre turbulent de l'état stationnaire final. A ce propos nous avons dû reformuler la base mathématique constituée par les équations cinétiques de l'onde établies dans le cadre de la turbulence faible dont nous avons justifié l'applicabilité pour les adapter au cas des modes localisés. Les expressions explicites de l'équation cinétique du nombre d'occupation sont données dans le chapitre V. Dans le chapitre VI, nous présentons les calculs analytiques du spectres turbulent, nous y montrons que les modes ayant une faible extension dans la direction radiale sont les plus difficiles à saturer il s'en suit que l'énergie turbulente est principalement distribuée sur les dits modes. Ceux-ci interagissent de deux façons selon leur longueur d'onde relative au rayon de Larmor des ions :

i) Les modes de grandes longueurs d'onde interagissent par couplage résonnant à trois modes. Dans ce processus d'interaction non-linéaire ce sont les modes naturellement amortis qui servent comme agent de dissipation de l'énergie des modes instables.

ii) Les modes de courtes longueurs d'onde interagissent par l'intermédiaire de la diffusion induite par les ions (ou effet Landau non-linéaire). Dans ce processus les modes reçoivent l'énergie en provenance des modes de plus courtes longueurs d'onde et en perdent au détriment des modes de plus grandes longueurs d'onde.

Nous avons calculé le spectre de turbulence en utilisant une hypothèse faible selon laquelle les modes naturellement amortis restent sur un niveau négligeable devant celui des modes les plus instables et nous avons trouvé que :

- L'énergie turbulente est essentiellement concentrée dans le domaine des grandes longueurs d'onde.

- L'énergie turbulente totale est très inférieure à l'énergie cinétique totale disponible.

- La vitesse de dérive électrique due au champ électrique turbulent est très petite devant la vitesse de dérive diamagnétique du plasma.

- Le coefficient de diffusion anormale est inférieur à celui prévu par Bohm et le facteur de réduction est proportionnel au rapport $\frac{L_s}{r}$.

Ces résultats globaux sur les théories linéaire et non-linéaire ont fait l'objet de deux publications (15)(16).

o o
o

C H A P I T R E I

GENERALITES

Nous considérons dans ce chapitre tout d'abord un modèle simple de plasma susceptible de décrire d'une manière succincte l'existence des oscillations de dérive puis nous analyserons les améliorations apportées par les théories plus élaborées et nous dégagerons enfin le mécanisme physique de l'instabilité de dérive.

1. OSCILLATIONS DE DERIVE DANS UN PLASMA INHOMOGENE.

Considérons un plasma inhomogène confiné par un champ magnétique B dirigé selon l'axe Oz du système de référence Oxyz et soit Ox la direction de l'inhomogénéité.

Dans la mesure où les ions sont froids et si l'inertie des électrons peut être négligée, on peut décrire le système par les équations hydrodynamiques suivantes :

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } n_i \vec{v}_i = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \frac{e}{M} (\nabla \phi - \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}}{c}) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div } n_e \vec{v}_e = 0 \quad (1.3)$$

$$T_e \frac{\nabla n_e}{n_e} - \frac{e}{m} (\nabla \phi - \frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c}) = 0 \quad (1.4)$$

où les notations sont standards et nous avons choisi le symbole e pour désigner la charge du proton.

Ces équations montrent qu'à l'équilibre la vitesse macroscopique des ions est nulle alors que celle des électrons $\vec{v}_e^0$ est dirigée selon l'axe Oy et donnée par la formule :

$$v_e^0 = v_d \equiv - \frac{eT}{eB} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \quad (1.5)$$

d'après le profil de la densité, la quantité v_d ainsi définie est toujours positive et désignée sous le nom de vitesse diamagnétique.

Considérons maintenant une perturbation de l'état d'équilibre caractérisée par le potentiel ϕ de la forme $\phi = \tilde{\phi} \exp-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, et en portant celle-ci dans (1.2), nous obtenons dans la limite des basses fréquences ($\omega \ll \Omega_i$) les composantes transverse et longitudinale de la vitesse des ions données par :

$$\vec{v}_{i \perp} = \frac{ie}{B} (\vec{k} \times \vec{h}) \tilde{\phi} \quad (1.6)$$

$$v_{iz} = \frac{e}{M} \frac{k_z}{\omega} \tilde{\phi} \quad (1.7)$$

où $\vec{h}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Oz.

En portant (1.6) et (1.7) dans (1.1) nous obtenons pour la perturbation de la densité ionique l'expression

$$\frac{\delta \tilde{n}_i}{n_0} = \left(\frac{k_y v_d}{\omega} - \frac{k_z^2 T_e}{M \omega^2} \right) \frac{e \tilde{\phi}}{T} \quad (1.8)$$

On suppose que les électrons sont suffisamment rapides pour obéir à une distribution maxwellienne locale telle que $n_e = n_0 \exp \frac{e \tilde{\phi}}{T_e}$. En linéarisant cette expression, on obtient pour la perturbation de la densité électronique :

$$\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{e \tilde{\phi}}{T} \quad (1.9)$$

ce qui donne, en vertu de la quasi-neutralité ($n_i = n_e$) la relation :

$$\omega^2 - \omega_* \omega - \frac{k_z^2 T_e}{M} = 0 \quad (1.10)$$

où nous avons posé :

$$\omega_* = k_y v_d \quad (1.11)$$

et la réaction (1.10) qui constitue la relation de dispersion du milieu inhomogène montre qu'il existe deux ondes qui se propagent en sens contraire. Sur la figure 1 ci-contre nous

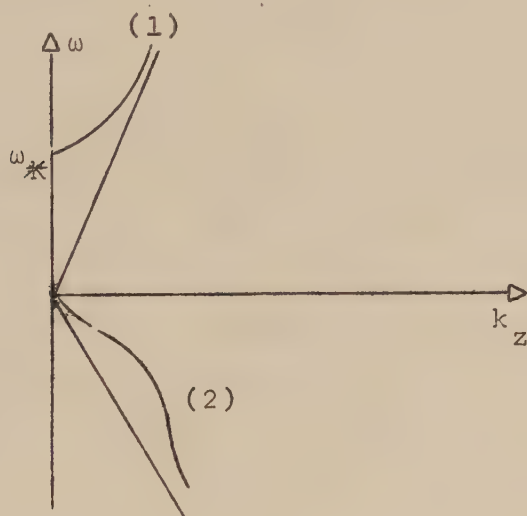


Figure 1

représentons la variation de en fonction de k_z . La branche (1) représente l'onde de dérive dont la fréquence tend vers ω_* lorsque k_z tend vers zéro. La branche (2) se réfère à l'onde qui se propage dans la direction opposée à la première et pour k_z tendant vers zéro la fréquence de cette onde tend aussi vers zéro.

Nous considérerons désormais uniquement l'onde de dérive représentée par la branche (1)

2. PROGRES REALISES DANS L'ETUDE DES ONDES DE DERIVE

Dans le modèle hydrodynamique que nous veons de voir, l'existence d'une onde de dérive a pu être mise en évidence dans le cas le plus simple. Rudakov et Sagdeev ont considéré le même problème avec en plus un gradient de température. La théorie de Rudakov et Sagdeev repose sur l'équation cinétique obtenue dans l'approximation de dérive qui est l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} \left(-\nabla \phi + \frac{v \times B}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (1.12)$$

dans laquelle la composante perpendiculaire du vecteur vitesse est remplacée par la vitesse de dérive diélectrique $v_{\perp} = - \frac{c \nabla \phi \times B}{B^2}$.

L'équation (1.12) se ramène ainsi sous la forme unidimensionnelle et on obtient sans peine la relation de dispersion qui s'écrit dans la limite des vitesses de phase telles que $v_i \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_e$, sous la forme :

$$\omega^2 - \omega_*^2 - \frac{k_z^2 T_e}{M} + \frac{i \sqrt{\pi} \omega^2}{k_z v_e} (\omega - \omega_* (1 - \frac{1}{2} \frac{d \log T_e}{d \log n})) = 0 \quad (1.13)$$

Nous voyons donc si $\frac{\partial \log T_e}{\partial \log n} < 0$ on obtient une onde instable, mais en l'absence du gradient de température et pour des petites valeurs de k_z l'équation (1.13) ne diffère de (1.10) que par un terme imaginaire qui tient compte de la résonance des électrons avec l'onde et dans ce cas, l'équation (1.13) quoique complexe admet une racine réelle $\omega = \omega_*$ comme précédemment. En réalité, cette stabilité trouvée dans le cas où il n'y a pas de gradient de température est purement accidentelle : une déviation de la fréquence de la valeur ω_* donnera nécessairement un terme imaginaire non nul dans (1.13) et on trouvera une racine instable. Nous porterons notre attention désormais uniquement aux systèmes à température isotrope et nous allons maintenant revoir les améliorations apportées sur la théorie de Rudakov et Sagdeev dans laquelle le champ électrique a été pris au centre des cercles de Larmor des particules. Dans les théories postérieures le champ électrique a été pris comme sa valeur moyenne sur les cercles de Larmor. En effectuant la moyenne du champ sur les cercles de rayons $\frac{v_{\perp}}{\Omega_i}$ répartis suivant une distribution maxwellienne, on trouve que le champ effectif est réduit d'un facteur égal à $I_0(b)e^{-b}$ où I_0 est la fonction de Bessel modifiée et $b = \frac{1}{2} k_{\perp}^2 a^2$ avec $a = \frac{v_i}{\Omega_i}$, rayon de Larmor moyen des ions. On obtient en conséquence une fréquence inférieure à ω_* , ce qui d'après la remarque précédente, entraîne une instabilité possible. Cet effet, appelé effet des rayons de Larmor finis découvert par Rosenbluth, Krall et Rostoker⁽¹⁷⁾ dans le problème des instabilités en flûte, a été tenu en compte dans le travail de Kadomtsev et Timofeev qui ont

montré qu'une instabilité peut se développer quel que soit le rapport entre la longueur d'onde et le rayon de Larmor des ions et les résultats obtenus peuvent se résumer ainsi :

Dans les plasmas à $\beta > \frac{m}{M}$, les ondes sont excitées dans le domaine des vitesses de phase telles que $v_i < \frac{\omega}{k_z} < v_A$ où v_A est la vitesse d'Alfvén. Dans le domaine des grandes longueurs d'onde, le taux de croissance γ est maximum pour $k_z = \sqrt{2} \frac{\omega^*}{v_A}$ et vaut $\frac{\gamma_{\max}}{\omega^*} = \sqrt{\pi} \frac{v_A}{v_e} k_{\perp} a$. Dans le domaine des grandes valeurs d'onde, γ est maximum pour $k_z = \frac{v_d}{av_A}$ si $b < \frac{\beta M}{m}$ et pour $k_z = \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{k_{\perp} a}{r}$ si

$b > \frac{\beta M}{m}$. La variation du taux de croissance maximum en fonction de b est illustrée dans la figure ci-contre.

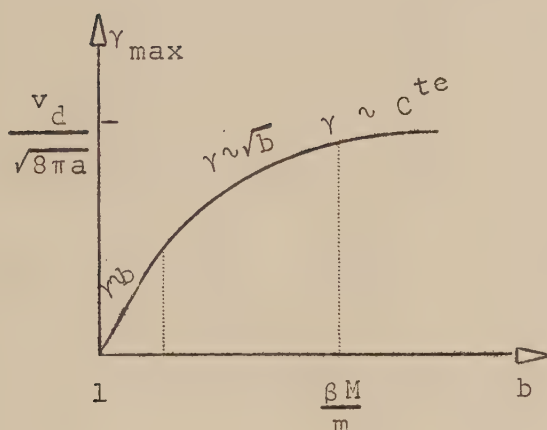


Figure 2

3. MECANISME DE L'INSTABILITE

Nous avons vu que l'onde a une vitesse de phase dans la direction parallèle au champ magnétique, très inférieure à la vitesse thermique des électrons, on pourrait donc penser à priori que ceux-ci, en raison de leur faible inertie, suivent une distribution maxwellienne en vitesse et contribuent à absorber l'onde par l'effet Landau. En réalité ceux-ci qui se déplacent avec la vitesse macroscopique v_d voient donc l'onde avec une fréquence

modifiée par l'effet Doppler donnée par $\omega - k_y v_d$. Cette fréquence qui est négative contribue ainsi à renverser le sens de l'effet Landau, ce qui donne une amplification de l'onde et cet effet est encore appelé effet Landau inverse, dû aux électrons résonnants avec l'onde.

Nous nous consacrerons dans le chapitre suivant au cas particulier des plasmas à $\beta < \frac{m}{M}$ qui présentent un intérêt sur le plan pratique.

o o
o

C H A P I T R E I I

PLASMA A FAIBLE β DANS UN CHAMP MAGNETIQUE UNIFORME

Dans ce chapitre nous considérons en détail la situation particulière des plasmas ayant $\beta < \frac{m}{M}$. Nous analyserons tout d'abord le cas d'un champ magnétique uniforme puis les raisons qui nous amènent à introduire à celui-ci un cisaillement des lignes de force. Pour des raisons de simplicité nous adoptons comme la plupart des auteurs le modèle de plasma plaque à savoir une configuration à géométrie plane avec un profil de la densité dans la direction x (représenté dans la figure ci-contre) caractérisé

par un rayon caractéristique r défini comme

$$r = - \frac{n}{(\frac{dn}{dx})}$$

cette longueur représente en gros la dimension du plasma.

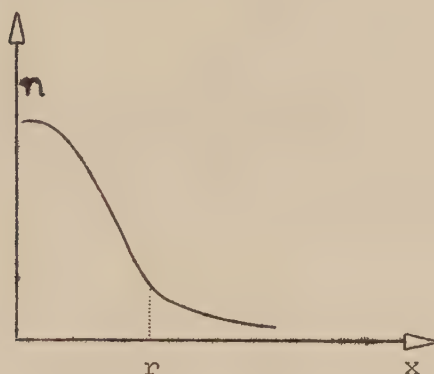


Figure 3

Afin de pouvoir élaborer une théorie compréhensible, nous supposons d'autre part que le plasma satisfait aux conditions suivantes :

- Les collisions sont négligeables
- Les électrons et les ions obéissent, à l'équilibre, à une distribution maxwellienne isotrope
- Les températures électronique et ionique sont égales
- Le rapport β est très petit et négligeable
- Le plasma est totalement ionisé.

1. EQUATION DE DISPERSION

Dans le cas des plasmas à $\beta < \frac{m}{M}$, la vitesse d'Alfvén est très supérieure à la vitesse thermique des électrons, l'hypothèse irrotationnelle du champ électrique qui est valable pour des vitesses de phase inférieures à la vitesse d'Alfvén, est donc susceptible de décrire correctement le système dans tous les domaines de vitesses de phase comparativement aux vitesses thermiques des particules. Nous poserons donc :

$$E = - \nabla \phi$$

et la fonction de distribution de chaque espèce obéit aux équations de Vlasov et Poisson :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{q}{m} \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \phi + 4\pi \sum_j q_j \int d\mathbf{v} f_j(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.2)$$

où les notations sont standards.

La fonction de distribution à l'équilibre f^0 qui décrit un système inhomogène dans l'espace $\mathbf{x}$ doit être une fonction des constantes de mouvement et vérifie l'équation

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_x \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (2.3)$$

On voit que les constantes de mouvement sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_z \\ v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ x + \frac{v_y}{\Omega} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où $\Omega = \frac{qB}{mc}$.

La fonction la plus simple susceptible de décrire un gradient de densité égale à $\varepsilon = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$ peut être choisie comme

$$f^0(r, v) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} v_{th}} \left\{ 1 - \varepsilon \left(x + \frac{v_y}{\Omega} \right) \right\} \exp - \frac{v^2}{v_{th}^2} \quad (2.5)$$

où $v_{th} = \sqrt{\frac{2T}{m}}$ et n_0 est la densité moyenne du plasma.

Par linéarisation de (2.1), les fluctuations δf par rapport à f^0 vérifient l'équation :

$$\frac{d}{dt} \delta f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta f = \frac{q}{m} \nabla \phi \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{v}} \quad (2.6)$$

L'expression de δf peut s'exprimer formellement sous la forme :

$$\delta f(r, v, t) = \frac{q}{m} \oint dt \nabla \phi(r, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f^0(r, v) \quad (2.7)$$

où le symbole $\oint$ désigne l'intégration sur les orbites non perturbées qui vérifient les équations différentielles à conditions initiales suivantes décrivant les orbites de Larmor des particules :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{q}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r} \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.8)$$

L'intégration sur les orbites sera considérablement simplifiée en faisant apparaître dans la partie à intégrer la dérivée totale. Pour cela nous récrivons l'intégrand comme

$$\nabla \phi(r, t) \frac{\partial f^0}{\partial \mathbf{v}}(r, v) = - \frac{m}{T} f^0(r, v) \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \frac{\varepsilon}{\Omega} f_M(v) \mathbf{e}_y \cdot \nabla \phi \quad (2.9)$$

où f_M est la partie maxwellienne de f^0 et $\mathbf{e}_y$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Oy .

La fonction $\phi(r,t)$ est indépendante de la vitesse, sa dérivée totale s'écrit simplement

$$\frac{d}{dt}\phi(r,t) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(r,t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi(r,t)$$

d'où la formule (2.7) s'écrit à nouveau sous la forme :

$$\delta f(r,v,t) = - \frac{q}{T} f^0(r,v) \left\{ \phi(r,t) - \oint dt \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e c T}{q B} \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi(r,t) \right\} \quad (2.10)$$

Comme le système n'est pas homogène dans l'espace x , nous faisons seulement une décomposition en série de Fourier sur les espaces homogènes de la fonction $\phi(r,t)$ qui s'exprime sous la forme

$$\phi(r,t) = \sum_k C_k \tilde{\phi}(x) \exp i(K_{\perp} r_{\perp} - \omega t)$$

où $K_{\perp}$ est le vecteur n'ayant que des composantes suivant les axes Oy et Oz égales respectivement à k_y et k_z , l'indice k s'étend à la fois sur K et ω , et C_k est l'amplitude du mode normal caractérisé par l'ensemble $\{k\}$.

Il apparaît d'après (2.10) que δf a la forme d'une superposition des modes normaux, pour chacun d'eux, la fluctuation associée s'écrit :

$$\delta f_k(r,v,t) = - \frac{q}{T} f^0(r,v) \left\{ \tilde{\phi}(r,t) - \oint dt \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{e c T}{q B} \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{\phi}(r,t) \right\}. \quad (2.11)$$

où nous avons posé

$$\tilde{\phi}(r,t) = \tilde{\phi}(x) \exp i(K_{\perp} r_{\perp} - \omega t)$$

Les fonctions δf_k et $\tilde{\phi}(r,t)$ sont reliées de façon self-consistante par l'intermédiaire de l'équation de Poisson, il en résulte que l'équation (2.11) est en fait une équation intégrale.

La relation de dispersion ne peut s'obtenir d'une manière simple que si on fait des hypothèses supplémentaires sur la fonction $\tilde{\phi}(x)$, nous présenterons à ce sujet deux méthodes permettant d'achever l'intégration de (2.11) puis nous en discuterons la validité.

1.1. Théorie locale

L'une des méthodes souvent adoptées consiste à faire l'hypothèse que la fonction $\tilde{\phi}(x)$ a une variation lente dans l'espace x et qu'on peut mettre sous la forme

$$\tilde{\phi}(x) = \tilde{\phi} \exp i \int k_x dx$$

où $k_x(x)$ dépend peu de x et l'analyse a un caractère local. On peut ainsi définir de nouveau le vecteur $\underline{k}$ ayant des composantes égales à k_x , k_y , k_z et mettre (2.11) sous la forme

$$\delta f_k(r, v, t) = - \frac{q\tilde{\phi}}{T} F^0(r, v) \left\{ e^{-i(kr - \omega t)} + i(\omega - k_y v_d) \int dt e^{-i(kr - \omega t)} \right\} \quad (2.12)$$

$$\text{où } v_d = - \frac{eT}{qB} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right).$$

On est amené ainsi à effectuer une intégration sur les orbites d'une fonction simple, les détails des calculs sont exposés en appendice A où nous montrons que dans la limite des basses fréquences les fluctuations sont données par :

$$\left. \begin{aligned} \delta f_k^i &= - \frac{e}{T} f_i^0 \left\{ 1 - \frac{\omega + k_y v_d}{\omega - k_z v_z} J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \right\} \tilde{\phi}(r, t) \\ \delta f_k^e &= \frac{e}{T} f_e^0 \left\{ 1 - \frac{\omega - k_y v_d}{\omega - k_z v_z} \right\} \tilde{\phi}(r, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

où nous avons posé $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ et J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro.

Dans les formules (2.13) les rayons de Larmor des électrons ont été négligés, ce qui sera valable pour le domaine des longueurs d'onde perpendiculaires telles que $\frac{k_{\perp} v_i}{\Omega_i} < \sqrt{\frac{M}{m}}$.

En portant les expressions des fluctuations données par (2.13) dans l'équation de Poisson, nous aboutissons à la relation de dispersion qui peut s'écrire sous la forme

$$2 + \frac{k^2}{k_D^2} - I_0(b) e^{-b} \frac{(\omega + \omega_*)}{\omega} (1 + W_i) - \frac{\omega - \omega_*}{\omega} (1 + W_e) = 0 \quad (2.14)$$

où nous avons posé :

$$a = \frac{v_i}{\Omega_i}$$

$$b = \frac{1}{2} k_L^2 a^2$$

$$k_D^2 = \frac{4\pi c^2 n_0}{T}$$

$$W_{i,e} = - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{dz e^{-z^2}}{z - \frac{\omega}{k_z v_{i,e}}}$$

$$I_0(x) = J_0(ix)$$

Rappelons que la fonction $W(z)$ est reliée à la fonction $Z(z)$ tabulée par Fried et Conte par la relation

$$zZ(z) = - \{1 + W(z)\}$$

Au voisinage de l'origine et pour des valeurs asymptotiques de z la fonction $W(z)$ possède respectivement les comportements suivants :

$$W(z) \approx -1 - i\sqrt{\pi} z e^{-z^2} \quad \text{pour } |z| \ll 1$$

$$W(z) \approx \frac{1}{2z^2} - i\sqrt{\pi} z e^{-z^2} \quad \text{pour } |z| \gg 1$$

Pour la fonction $I_0(b) e^{-b}$ nous obtenons les développements

$$I_0(b) e^{-b} \approx 1 - b + \theta(b^2) \quad \text{pour } b \ll 1$$

$$I(b) e^{-b} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \left\{ 1 + \theta\left(\frac{1}{b}\right) \right\} \quad \text{pour } b \gg 1$$

1.2. Théorie exacte

La seconde méthode que nous exposerons ci-dessous permettrait en principe d'obtenir l'équation de dispersion exacte. Celle-ci consiste à développer la fonction $\tilde{\phi}(x)$ autour de l'orbite de Larmor des particules en série de Taylor :

$$\tilde{\phi}(x') = \tilde{\phi}(x) + (x' - x) \frac{d\tilde{\phi}(x)}{dx} + \frac{1}{2}(x' - x)^2 \frac{d^2\tilde{\phi}(x)}{dx^2} + \dots \quad (2.15)$$

où x' est la position de la particule au temps t' .

On porte ensuite ce développement dans l'intégrand de (2.11) puis on effectuera l'intégration terme à terme. Les détails des calculs sont exposés en appendice A où nous montrons que le terme associé à la dérivée première de $\tilde{\phi}(x)$ est nul et le résultat final s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \delta f_k^i(r, v, t) &= - \frac{e}{T} f_i^0 \left[1 - \frac{\omega + \omega_*}{\omega - k_z v_z} \left\{ J_0^2 \left(\frac{K v_\perp}{\Omega} \right) + \frac{v_\perp^2}{2\Omega^2} \left\{ J_0^2 \left(\frac{K v_\perp}{\Omega} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + J_0 \left(\frac{K v_\perp}{\Omega} \right) J_2 \left(\frac{K v_\perp}{\Omega} \right) \right\} \frac{d^2}{dx^2} \right] \tilde{\phi}(r, t) \right\} \\ \delta f_k^e(r, v, t) &= - \frac{e}{T} f_e^0 \left\{ 1 - \frac{\omega - \omega_*}{\omega - k_z v_z} \right\} \tilde{\phi}(r, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

ce qu'on peut mettre sous la forme identique à celle obtenue dans l'approximation locale en définissant le vecteur $\hat{k}$ comme un opérateur de composantes $k_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $k_y = K_y$, $k_z = K_z$. On peut vérifier en effet que les expressions (2.16) peuvent s'exprimer à l'aide de l'opérateur $\hat{k}$ par la formule

$$\delta f_k^i(r, v, t) = - \frac{e}{T} f_i^0 \left\{ 1 - \frac{\omega + \omega_*}{\omega - K_z} J_0^2 \left(\frac{\hat{k}_\perp v_\perp}{\Omega} \right) \right\} \tilde{\phi}(r, t) \quad (2.17)$$

qui est formellement identique à l'expression de la fluctuation ionique donnée par la formule (2.13) obtenue dans l'approximation locale mais à la différence que le symbole $\hat{k}$ représente ici un opérateur différentiel agissant sur la fonction $\tilde{\phi}(x)$.

En portant les expressions des fluctuations dans l'équation de Poisson on obtient une équation analogue à (2.14) de la forme :

$$\hat{D}(K, \omega) \hat{\phi}(x) \equiv \left\{ 2 + \frac{K^2}{k_D^2} - I_i(\vec{b}) e^{-\vec{b}} \frac{\omega + \omega^*}{\omega} (1 + W_i) - \frac{\omega - \omega^*}{\omega} (1 + W_e) \right\} \hat{\phi}(x) = 0$$

$$\vec{b}^2 = - \frac{a^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} K_y^2 a^2 \quad (2.18)$$

On obtient ainsi l'équation de dispersion sous la forme d'une équation différentielle.

Nous avons ainsi développé les deux méthodes permettant d'analyser le caractère de l'onde et nous considérons maintenant leur domaine d'applicabilité.

A priori la théorie locale peut décrire les ondes ayant une longueur d'onde λ_x très inférieure à la distance caractéristique r de la densité mais elle ne renseigne pas sur la distance Δ dans laquelle l'onde est localisée. Il en résulte que les études de l'instabilité basées sur les équations obtenues par la théorie locale seront correctes si le paquet d'onde initialement localisé en un point, réussit à croître beaucoup pendant un temps plus court que celui qu'il met pour se déplacer hors de la zone de localisation. Cette condition s'écrit :

$$\gamma_k \left(\frac{\partial k_x}{\partial \omega_k} \right) \gg 1$$

Dans le cas contraire l'analyse de l'équation (2.18) serait nécessaire, nous rappelons toutefois que celle-ci repose sur le développement de Taylor l'opérateur $\vec{b}$, ce qui n'est valable que pour les modes satisfaisant à la condition $k_x^2 a^2 < 1$.

2. CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DES MODES

Dans le cas d'un champ magnétique uniforme considéré ici nous pouvons analyser la question d'instabilité des modes de dérive à partir de la relation de dispersion (2.14) établie dans le cadre de la théorie locale. Nous vérifions à postériori que le taux de croissance dépend effectivement peu de k_x . L'équation (2.14) se réduit à une équation algébrique simple dans les deux domaines séparés des vitesses de phase parallèles auxquels correspondent deux types de modes que nous décrirons successivement ci-dessous.

Modes résonnants

Dans le domaine des vitesses de phase telles que $v_i \ll \frac{\omega}{k_z} \ll v_e$, nous utilisons pour la fonction W_e le développement à l'origine et pour la fonction W_i le développement asymptotique. En négligeant d'autre part les termes d'ordre $\frac{k^2}{k_D^2}$, l'équation (2.14) dans ce domaine des vitesses de phase, dit résonnant, prend la forme :

$$2\omega - I_0 e^{-b} (\omega_* + \omega) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2}\right) + \frac{i\sqrt{\pi}\omega(\omega - \omega_*)}{k_z v_e} - i\sqrt{\pi} I_0 e^{-b} \frac{\omega(\omega + \omega_*)}{k_z v_i} e^{-\frac{\omega^2}{k_z^2 v_i^2}} = 0 \quad (2.19)$$

Dans la mesure où les termes imaginaires sont petits devant les termes réels, on peut résoudre (2.19) par approximations successives.

On obtient alors la fréquence réelle et le taux de croissance en posant dans (2.19) :

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega$$

avec $|\frac{\delta\omega}{\omega_0}| \ll 1$. Par identification on tire :

$$\omega_o = \omega_* \frac{I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}}$$

$$\frac{\delta \omega}{\omega_*} = \frac{I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}} \frac{(\omega_* + \omega_o)}{\omega_o} \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega_o^2} + \frac{i \sqrt{\pi} \omega_o (\omega_* - \omega_o)}{k_z v_e} \left(1 - \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{\omega_* - \omega_o}{\omega_* + \omega_o}\right) I_o e^{-b} e^{-\frac{\omega_o^2}{k_z^2 v_i^2}} \quad (2.20)$$

La quantité $\delta \omega$ représente la correction de la fréquence, son effet sur la partie réelle de celle-ci est négligeable, par contre elle donne une correction imaginaire qui provient de deux sources, celle qui est relative aux électrons contribue à une déstabilisation et celle relative aux ions à un amortissement.

En comparant les deux termes stabilisant et déstabilisant de $\frac{\delta \omega}{\omega_*}$, on obtient, à l'aide de l'expression de ω_o , la condition de stabilité marginale :

$$\frac{k_z}{k_y} = \frac{v_d}{v_i} \frac{I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}} \left(\text{Log} \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}} \right)^{-1} \quad (2.21)$$

il s'en suit que les modes stables satisfont la condition

$$\frac{\omega}{k_z v_i} < \sqrt{\text{Log} \left(\sqrt{\frac{M}{m}} \frac{I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}} \right)} \quad (2.22)$$

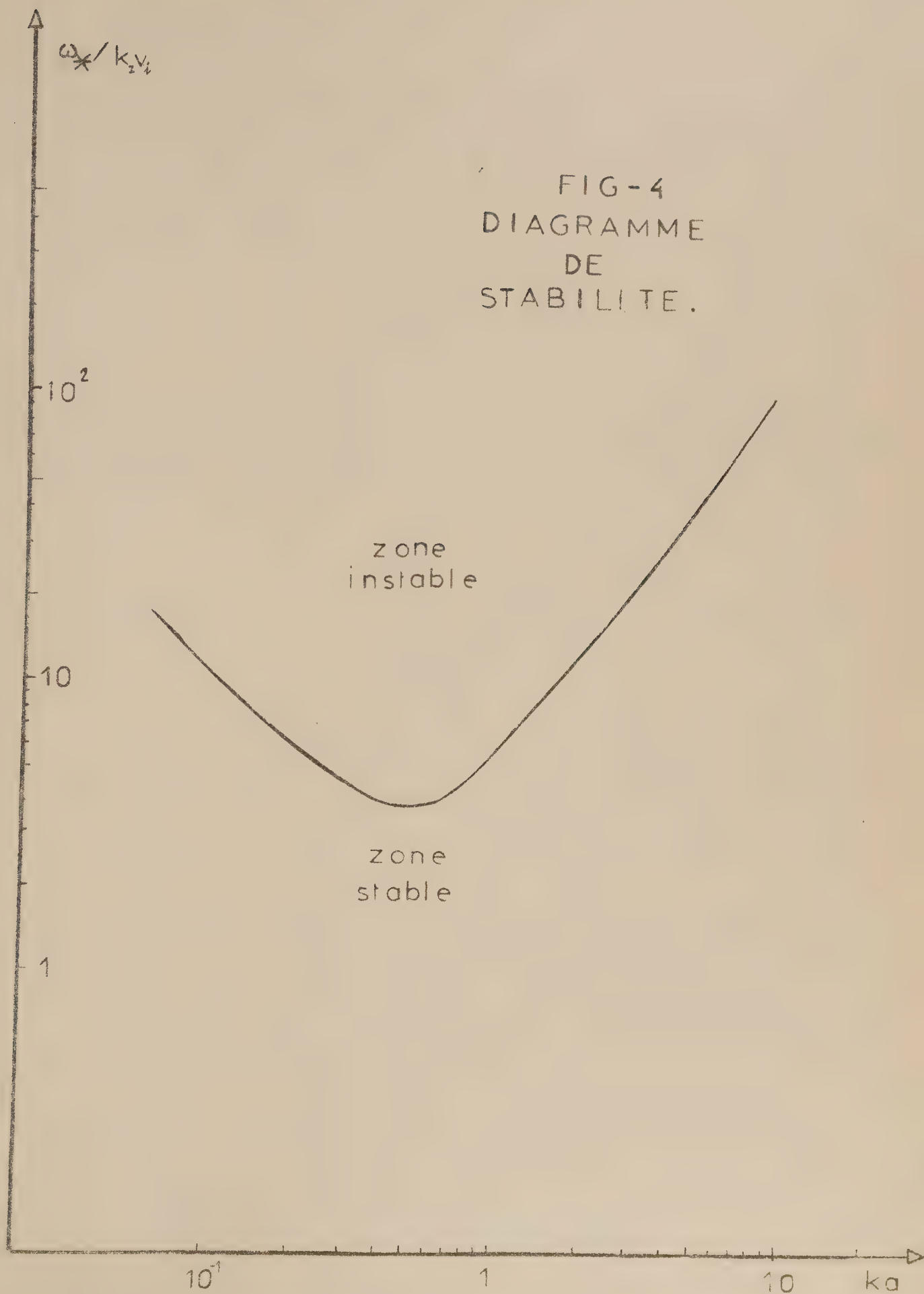
le diagramme de stabilité est illustré sur la figure N° 4 qui montre qu'il existe une séparation entre les zones stable et instable.

Pour des valeurs de k_z telles que $\frac{k_z}{k_y} \ll \frac{v_d}{v_i}$, les modes sont instables et nous obtenons le taux de croissance grâce à (2.20) :

$$\frac{\gamma}{\omega_*} = \sqrt{\pi} \frac{I_o e^{-b} (1 - I_o e^{-b})}{(2 - I_o e^{-b})^3} \frac{\omega_*}{k_z v_e} \quad (2.23)$$

On voit ainsi que la fréquence et le taux de croissance dépendent peu de k_x , en considérant $k_x \ll k_y$ on trouve que dans

FIG-4
DIAGRAMME
DE
STABILITE.



le domaine des grandes longueurs d'onde perpendiculaire la fréquence est légèrement inférieure à ω_* et le taux de croissance croît avec $k_{\perp}^2 a^2$. Leurs expressions respectives sont

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_*} &\approx 1 - k_{\perp}^2 a^2 \\ \frac{\gamma}{\omega_*} &\approx \frac{\sqrt{\pi} \omega_* k_{\perp}^2 a^2}{k_z v_e} \end{aligned} \quad (2.24)$$

dans le domaine des courtes longueurs d'onde, la fréquence tend vers une valeur constante mais le taux de croissance continue à croître avec $k_{\perp} a$ avec les expressions respectives suivantes :

$$\begin{aligned} \omega &\approx \frac{v_d}{\sqrt{4\pi} a} \\ \gamma &\approx \frac{1}{8} \frac{\omega_*^2}{k_{\perp} a k_z v_e} \end{aligned} \quad (2.25)$$

D'après la relation (2.24) nous voyons que les modes de grandes longueurs d'onde du type résonnant sont ceux qui ont les composantes k_z et k_y satisfaisant à la condition $\frac{k_z}{k_y} < \frac{v_d}{v_e}$. Nous verrons, dans la limite inverse que les modes seront décrits par une instabilité fluide.

De même pour les modes de courte longueur d'onde, lorsque $\frac{k_z}{k_y} \rightarrow \frac{v_d}{v_e}$ le taux de croissance devient de l'ordre de la fréquence réelle et en même temps les termes imaginaires de l'équation (2.19) deviennent du même ordre que les termes réels et la méthode de résolution par approximation cesse d'être valable.

Considérons maintenant la situation inverse où on a $\frac{k_z}{k_y} \ll \frac{v_d}{v_e}$, l'équation (2.19) se réduit alors à

$$\frac{i\sqrt{\pi} \omega^2}{k_z v_e} + (2 - I_0 e^{-b} - \frac{i\sqrt{\pi} \omega_*}{k_z v_e}) \omega - I_0 e^{-b} \omega_* = 0 \quad (2.26)$$

On obtient ainsi une équation algébrique du second degré qui admet dans la limite $\frac{k_z}{k_y} \ll \frac{v_d}{v_e}$ une racine correspondant à un mode instable donnée pour $b \gg 1$ par la formule :

$$\omega = \frac{I_o e^{-b} (2 - I_o e^{-b})}{\pi} \frac{k_z^2 v_e^2}{\omega_*} \quad (2.27)$$

$$\gamma = \frac{I_o e^{-b}}{\sqrt{\pi}} k_z v_e$$

Nous vérifions que pour les modes de courte longueur d'onde les formules (2.27) donnent $|\frac{\omega + i\gamma}{k_z v_e}| \ll 1$ ce qui montre les modes de courte longueur d'onde étant toujours du type résonnant.

Modes fluides

Considérons maintenant les modes ayant une vitesse de phase parallèle telle que $\frac{\omega}{k_z v_e} \gg 1$. On peut alors utiliser pour les fonctions W_i et W_e leur développement asymptotique toujours petit devant celui de la partie électronique dans l'équation (2.14) qui se réduit maintenant à :

$$(1 - I_o e^{-b})(\omega + \omega_*) = \frac{1}{2}(\omega - \omega_*) \frac{k_z^2 v_e^2}{\omega^2} \quad (2.28)$$

Nous avons ainsi une équation du 3^e degré à coefficients réels qui admettrait deux racines complexes conjuguées si les composantes k_z et $k_\perp$ satisfont à l'inégalité

$$\frac{k_z}{k_y} < 2,2 \frac{v_d}{v_e} \sqrt{1 - I_o e^{-b}} \quad (2.29)$$

et puisque seuls les modes de grande longueur d'onde peuvent être du type fluide, la condition précédente s'écrit encore comme

$$\frac{k_z}{k_y} < 1,6 \frac{v_d}{v_e} (k_\perp a) \quad (2.30)$$

$\alpha\omega/v_d$
 $\alpha\delta/v_d$

-0,5

0,7

2

0,4

0,2

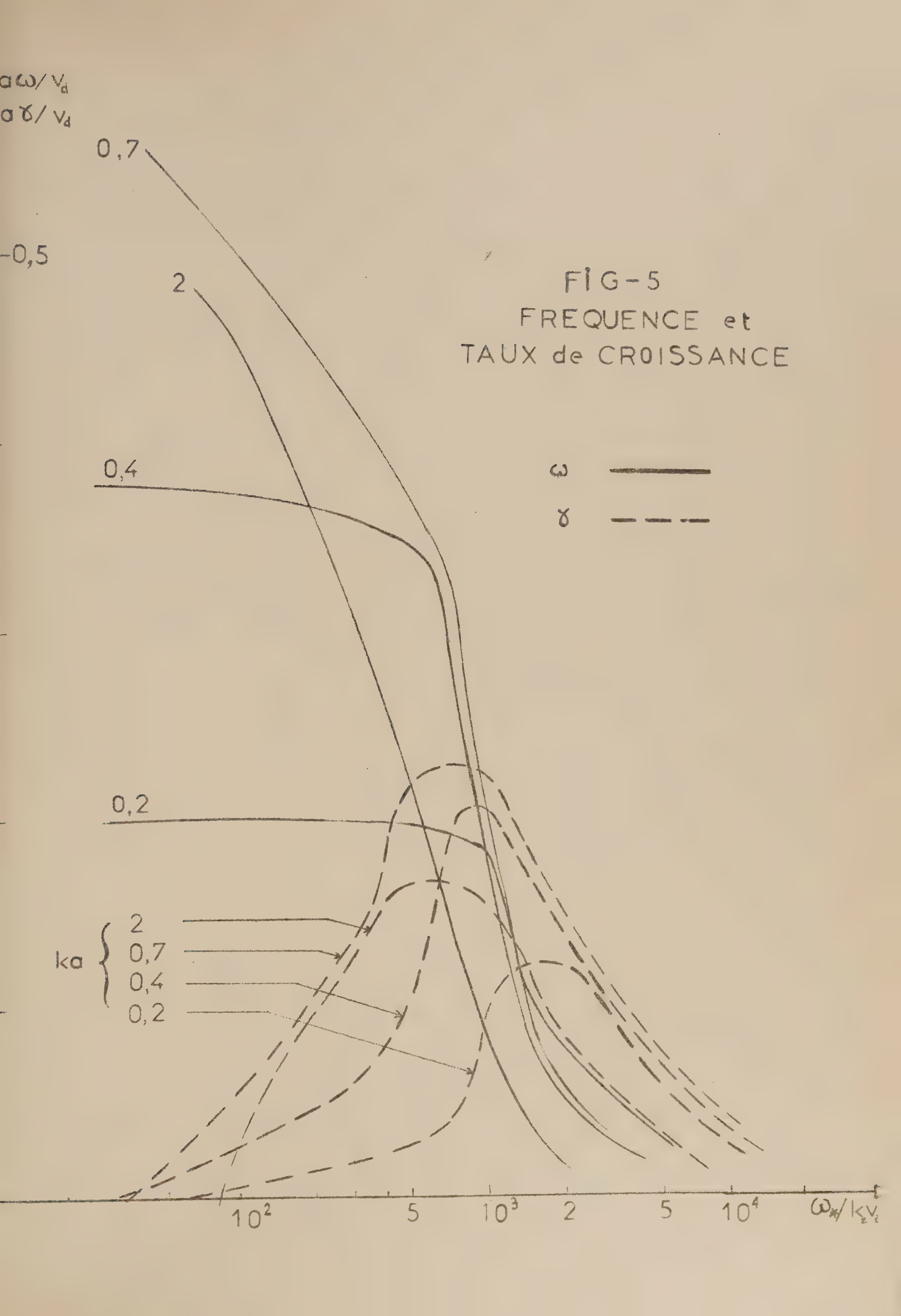
FIG-5
 FREQUENCE et
 TAUX de CROISSANCE

ω —————

δ - - - - -

ka {
 2
 0,7
 0,4
 0,2

10^2 5 10^3 2 5 10^4 $\omega_*/|k_z v_d|$



dans la limite $\frac{k_z}{k_y} \ll \frac{v_d}{v_e}(k_{\perp}a)$, l'équation (2.28) donne pour le taux de croissance l'expression :

$$\gamma = \frac{k_z}{k_y} \frac{v_e}{a} \quad (2.31)$$

3. ETUDE NUMERIQUE

Nous avons résolu numériquement l'équation (2.14) dans le cas $k_x = 0$. L'équation de dispersion contient alors quatre variables à savoir $\omega_R = \text{Re}\omega$, γ , k_z , k_y . Pour des raisons de commodité, nous avons calculé γ et ω pour des valeurs fixées de b et k_z .

Sur la figure 5, nous représentons la variation de γ en fonction de $\frac{\omega}{k_z v_i}$ pour une valeur donnée de b . Le réseau des courbes donne en même temps le diagramme de stabilité marginale ($\gamma = 0$). Nous constatons d'autre part que le taux de croissance est maximum pour une vitesse de phase telle que $\frac{\omega}{k_z v_e} \approx 0,5$, et devient supérieur à la fréquence réelle dans la zone fluide.

4. CONCLUSION

Nous avons analysé en détail le problème de l'instabilité des ondes de dérive développées dans les plasmas à faible pression ($\beta < \frac{m}{M}$) et nous avons montré que l'instabilité ne se limite pas sur un domaine restreint de vitesse de phase.

Dans la gamme des vitesses de phase correspondant à une instabilité résonnante, et pour les valeurs pas trop faibles de k_z , le taux de croissance est petit et le rapport $\frac{\gamma}{\omega}$ est très inférieur à 1.

Dans la gamme des vitesses de phase supérieures à la vitesse thermique des électrons ou pour les petites valeurs de k_z , le système est fortement turbulent, le rapport $\frac{\gamma}{\omega}$ peut dépasser l'unité.

Pour éviter les inconvénients dûs aux modes de grandes longueurs d'onde dans la direction parallèle au champ magnétique, les auteurs russes se sont bornés à considérer les plasmas à pression modérée telle que $\frac{m}{M} \ll \beta \ll 1$. Dans ce cas les modes à k_z petit ont une vitesse de phase toujours très inférieure à la vitesse thermique des électrons et l'instabilité dans ce cas reste toujours du type résonnant.

Une autre solution serait de trouver un moyen à faire augmenter artificiellement la composante suivant le champ magnétique du vecteur d'onde, c'est le but que nous suivons et nous analyserons les caractéristiques de l'instabilité dans le chapitre suivant.

o o
o

C H A P I T R E I I I

EFFET DE CISAILLEMENT SUR LA STABILISATION DES MODES NORMAUX

Nous avons montré dans le chapitre précédent le caractère fortement instable des modes ayant la composante du vecteur d'onde le long du champ magnétique voisine de zéro (modes fluides). Pour éviter cet inconvénient, la solution souvent proposée, consiste à donner au champ magnétique un cisaillement des lignes de force. Dans une telle configuration, la composante parallèle au champ magnétique du vecteur d'onde change dans l'espace et augmente en moyenne : il en résulte que la propriété locale de l'onde change et la théorie locale que nous avons développée dans le chapitre précédent n'est donc pas adéquate pour décrire les systèmes à géométrie complexe ; nous abandonnerons en effet la théorie quasi-locale pour adopter la théorie exacte qui nécessite donc la résolution d'une équation différentielle du type (2.18). Dans ce chapitre, nous établirons tout d'abord l'équation de dispersion adaptée aux systèmes présentant un cisaillement des lignes de force, nous exposerons ensuite les méthodes mathématiques pour la résolution de l'équation ainsi obtenue. Nous discuterons finalement le critère de stabilité des ondes (choix d'un cisaillement critique).

1. EQUATION DE DISPERSION

Nous choisirons une configuration du champ magnétique telle que celui-ci possède une composante B_y ne dépendant que de l'abscisse x . Nous supposons pour des raisons de commodité que cette composante suit une loi de variation linéaire qui s'écrit :

$$B_y = B_0 \frac{x}{L_s}$$

où L_s est une longueur caractéristique de la configuration du champ magnétique, appelée longueur de cisaillement. Nous représentons sur la figure ci-contre le champ magnétique en un point d'abscisse x .

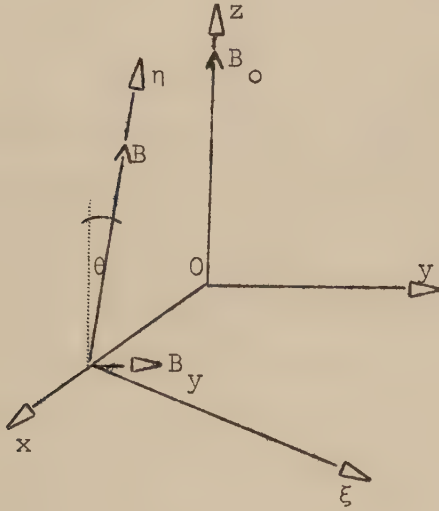


Figure 6

Généralement on a $L_s \gg r$ (où r est le rayon caractéristique du plasma), le champ magnétique en un point d'abscisse x peut donc être considéré comme le champ placé à l'origine, pivoté d'un faible angle $\theta \approx \frac{x}{L_s}$.

L'équation de dispersion dans ce cas peut se déduire simplement de l'équation (2.18) établie pour le cas d'un

champ magnétique uniforme. Dans ce dernier cas nous avons cherché les modes normaux sous la forme $\tilde{\phi}(x) \exp i(k_y y + k_z z)$. Ceux-ci deviennent ici $\tilde{\phi}(x) \exp i(k_{\perp} \eta + k_{\parallel} \xi)$ où ξ et η se rapportent respectivement aux axes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique. Dans le système d'axe $Ox\xi\eta$, l'équation de dispersion sera donc formellement identique à (2.18) dans laquelle le vecteur d'onde a pour composantes $k_{\perp}$ et $k_{\parallel}$ liées aux composantes k_y et k_z par

$$k_{\perp} = \frac{k_y B_z - k_z B_y}{B}$$

$$k_{\parallel} = \frac{k_y B_y + k_z B_z}{B}$$

Comme on a $k_z \ll k_y$ et $B_y \ll B_z$ à cause de la faible rotation du champ, nous avons ainsi

$$\left. \begin{aligned} k_{\perp} &\approx k_y \\ k_{\parallel} &\approx k_z + k_y \frac{x}{L_s} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Il s'en suit que l'introduction du cisaillement revient à redéfinir la composante parallèle au champ magnétique du vecteur d'onde selon la formule (3.1). On peut ainsi écrire l'équation de dispersion pour ce cas sous la forme

$$\bar{a}^2 \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + Q(x)\Phi(x) = 0$$

où
$$Q(x) = I_0 e^{-b} - \frac{2\omega - (\omega - \omega_*) (1 + W_e)}{(\omega + \omega_*) (1 + W_i)}$$

$$\bar{a}^2 = \frac{1}{2} a^2 (I_0 - I_1) e^{-b}$$

$$W_{i,e} = W(\omega/k_{||} v_{i,e})$$

$$k_{||} = k_z + k_y \frac{x}{L_s} \quad (3.2)$$

Dans le cas où la fonction $Q(x)$ est réelle sur l'axe réel, l'équation (3.2) est du type d'une équation de Schrödinger dont les méthodes d'étude ont été largement développées en mécanique quantique. Dans le présent cas la fonction $Q(x)$ est complexe, ce qui rend son étude difficile et il serait nécessaire d'élaborer une théorie mathématique qui puisse être adaptée à notre problème. Nous présenterons dans le paragraphe suivant les bases de la théorie dite B.K.W. dans le plan complexe indispensable pour la recherche des solutions de l'équation de dispersion.

2. METHODE B.K.W. GENERALISEE

La méthode développée simultanément et indépendamment par Brillouin, Kramers et Wentzel, appelée méthode B.K.W., pour étudier les équations différentielles du type

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} + q(z)\phi(z) = 0 \quad (3.3)$$

où $q(z)$ est réel sur l'axe réel z , peut être généralisée au cas complexe moyennant quelques précautions.

Considérons maintenant le plan complexe z et supposons que la fonction $q(z)$ admette deux zéros simples z_1 et z_2 , nous pouvons ainsi définir une ligne (C) passant par z_1 et z_2 sur laquelle la fonction $q(z)$ est purement réelle et la méthode B.K.W. classique est valable (Cf. figure 7 ci-dessous).

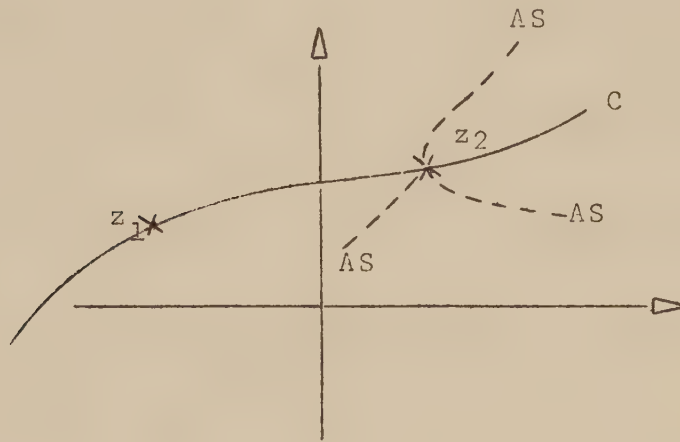


Figure 7

Plan complexe z et les lignes de Stokes

Sur la ligne C, l'équation (3.3) s'écrit :

$$\frac{d^2 \phi(z_C)}{dz_C^2} + q(z_C)\phi(z_C) = 0 \quad (3.4)$$

et les solutions approchées B.K.W. valables autour des points tournants z_1 et z_2 sont données par la formule

$$\phi^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \exp \pm i \int_{z_1, z_2}^z \sqrt{q(z)} dz \quad (3.5)$$

il est naturel de prolonger analytiquement la formule (3.5) dans le plan complexe z jusqu'aux régions contenant $\pm \infty$ de l'axe réel. La validité du prolongement analytique peut être étudiée grâce aux considérations suivantes :

Plaçons-nous maintenant au voisinage du point z_2 où la fonction $q(z)$ peut être approximée comme

$$q(z) = (z-z_2)q'(z_2) \quad (3.6)$$

ce qui donne pour les fonctions B.K.W. associées à ce point

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(z)}} \exp \frac{2i}{3}(q'(z_2))^{1/2}(z-z_2)^{3/2} \quad (3.7)$$

Nous voyons que les fonctions ϕ^+ et ϕ^- sont purement oscillantes sur les trois demi-droites d'équation

$$\operatorname{Im} \frac{2}{3}(q'(z_2))^{1/2}(z-z_2)^{3/2} = 0 \quad (3.8)$$

formant trois secteurs d'angle $\frac{2\pi}{3}$, appelées lignes Anti-Stokes que nous noterons par A-S sur la figure 7. Il est clair que pour les points éloignés du point tournant, les lignes Anti-Stokes ont pour équation

$$\operatorname{Im} \int_{z_2}^z \sqrt{q(z)} dz = 0 \quad (3.9)$$

et entre deux lignes Anti-Stokes voisines, la partie imaginaire de l'intégrale $\int_{z_2}^z \sqrt{q(z)} dz$ garde un signe constant, il s'en suit

que dans un secteur donné, une détermination donnée (ϕ^+ ou ϕ^-) possède un module exponentiellement petit ou exponentiellement grand selon le signe de $\operatorname{Im} \int \sqrt{q(z)} dz$ dans cette région et cette propriété change lorsqu'on traverse une ligne Anti-Stokes. Nous dirons qu'un domaine est dominant (ou sub-dominant) par rapport à une détermination lorsque celle-ci est exponentiellement grande (ou petite) dans le domaine considéré. Il est clair que si un domaine est dominant par rapport à une détermination, il est

subdominant par rapport à l'autre (et inversement) et le caractère dominant change lorsqu'on traverse une ligne Anti-Stokes.

Il résulte de ces considérations que si nous représentons la solution de l'équation différentielle (3.3) par une détermination B.K.W. obtenue par prolongement analytique de la formule (3.5) la solution approchée ainsi définie ne peut pas représenter la même fonction dans le plan complexe entier en raison des erreurs cumulées lorsqu'on traverse une ligne de Stokes. Il s'en suit que la solution de l'équation différentielle originale doit être représentée par une combinaison linéaire des fonctions B.K.W. pures avec des coefficients choisis d'une manière appropriée. La formule permettant de choisir les coefficients de proportionnalité connectant les solutions B.K.W. entre deux régions voisines, dite formule de connexion, fait l'objet de nombreuses études à l'heure actuelle, nous nous contentons simplement d'examiner dans ce chapitre le problème des modes propres obéissant aux conditions aux limites suivantes : $\phi(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm \infty$. Nous constatons que deux situations sont possibles.

a) Si $\text{Im } \sqrt{q(x)}$ admet les signes différents pour $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$, on peut prolonger la solution (3.5) sur l'axe réel tout entier sans rencontrer une ligne de Stokes.

b) Si $\text{Im } \sqrt{q(x)}$ possède le même signe pour $x \rightarrow \pm \infty$, en prolongeant la solution approchée (3.5) de $-\infty$ à $+\infty$, il est nécessaire de connecter à la solution exacte au voisinage des points tournants et on obtient dans ce cas la formule de quantification usuelle :

$$\int_{z_1}^{z_2} \sqrt{q(z)} dz = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Par distinction avec la mécanique quantique, l'intégration ici s'effectue sur un chemin se trouvant généralement dans le plan complexe. On obtient par la formule (3.10) une relation entre la fréquence et le nombre d'onde qui constitue dans notre problème la relation de dispersion relative aux modes localisés.

3. ETUDE DES MODES NORMAUX

Considérons maintenant l'équation de dispersion (3.2) au voisinage du point où le gradient de densité est maximum. Autour de ce point choisi comme origine, le gradient de densité admet une variation parabolique et la fonction $\omega_*(x)$ peut être représentée comme

$$\omega_*(x) = \omega_* \left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) \quad (3.11)$$

Si le cisaillement n'est pas trop faible, ce que nous préciserons ultérieurement, nous pouvons négliger le domaine fluide pour ne considérer que le domaine résonnant tel que $v_i \ll \frac{\omega}{k_{||}} \ll v_e$ où le milieu est localement instable. L'équation (3.2) dans cette région peut alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) + Q(x) \Phi(x) = 0 \\ Q(x) \equiv Q_R + iQ_I = I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} - \left(\frac{\omega_* \omega}{(\omega_* + \omega)^2} - \frac{4\omega_*^2 r^4}{\omega(\omega_* + \omega) a^2 L_s^2} \right) \frac{x^2}{r^2} \\ + i \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{(\omega_* - \omega) \omega}{(\omega_* + \omega) \omega_*} \frac{a L_s}{r |x|} \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'étude de cette équation dépend de l'allure du "potentiel" $Q_R(x)$ dont la courbure est déterminée par la valeur relative du rapport $\frac{r^2}{a L_s}$. Nous considérerons les deux situations extrêmes des faibles cisaillements caractérisés par $\frac{a L_s}{r^2} \gg 1$ et des forts cisaillements caractérisés par $\frac{a L_s}{r^2} \ll 1$.

3.1. Limites des faibles cisaillements

Pour des valeurs du cisaillement telles que $\frac{a L_s}{r^2} \gg 1$ la variation de $k_{||}(x)$ est négligeable devant celle de la densité

et l'équation de dispersion peut être écrite sous la forme :

$$\bar{a}^{-2} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + (I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} - \frac{\omega_* \omega}{(\omega_* + \omega)^2} \frac{x^2}{r^2} + i \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{(\omega_* - \omega) \omega}{(\omega_* + \omega) \omega_*} \frac{a L_s}{r |x|}) \Phi = 0 \quad (3.13)$$

En ignorant temporairement le terme imaginaire du "potentiel" supposé négligeable devant sa partie réelle, nous voyons que l'équation (3.13) a l'allure d'un puits de potentiel. Nous pouvons dans ce cas trouver les fonctions propres satisfaisant aux conditions aux limites $\Phi(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm \infty$. Nous voyons qu'en l'absence de la perturbation représentée par le terme imaginaire, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique, ce qui donne immédiatement pour les modes propres l'expression qui leur est associée sous la forme :

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{4 \sqrt{\pi \Delta^2}} H_n\left(\frac{x}{\Delta}\right) \exp - \frac{x^2}{2 \Delta^2} \quad (3.14)$$

$$I_0(b) e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} = (n + \frac{1}{2}) \frac{\bar{a}^2}{\Delta^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\Delta^2}{ar} = \frac{\omega_* + \omega}{2 \sqrt{\omega_* \omega}} \quad (3.16)$$

où H_n désigne le polynôme d'Hermite d'ordre n .

On voit ainsi que les fonctions propres oscillent dans la région voisine de l'origine et décroissent exponentiellement vers zéro dans la région extérieure. Le domaine dans lequel les fonctions propres possèdent une amplitude appréciable, appelé domaine de localisation peut être estimé par la distance entre les points tournants dont l'abscisse x_0 est, d'après (3.13) et (3.15) :

$$\frac{x_0^2}{r^2} = 4(n + \frac{1}{2}) \frac{\Delta^2}{r^2} \quad (3.17)$$

On voit donc que la largeur de localisation des modes augmente avec le nombre radial n et la quantité Δ introduite dans (3.16) est la largeur du mode le plus localisé correspondant au mode $n = 0$.

Remarquons que le nombre d'onde moyen k_x^2 défini comme la valeur moyenne de l'opérateur $k_x^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur les états propres $\Phi_n(x)$ a pour expression

$$\langle k_x^2 a^{-2} \rangle = (2n+1) \frac{\Delta^2}{r^2} \quad (3.18)$$

ce qui constitue une différence avec le cas des ondes planes, car le nombre d'onde k_x augmente avec la largeur de localisation des modes et ne peut pas être choisi arbitrairement. Nous verrons par la suite (chapitre 6) que cette propriété a une corollaire importante sur le niveau d'énergie turbulente des modes.

Pour les modes correspondant aux premières valeurs de n , nous pouvons négliger le second membre de (3.15), ce qui donne pour la fréquence et la largeur Δ les expressions

$$\frac{\omega}{\omega_*} = \frac{I_0 e^{-b}}{2 - I_0 e^{-b}} \quad (3.19)$$

$$\frac{\Delta}{\sqrt{ar}} = (2 - I_0 e^{-b})^{-1/2} \left(\frac{I_0 - I_1}{I_0} \right)^{1/4}$$

Nous voyons que la largeur de localisation est très inférieure à la distance caractéristique r de l'inhomogénéité et dans le domaine de localisation des modes, nous avons toujours $\frac{\omega}{k_{||} v_i} \gg 1$ ce qui justifie le développement de Taylor pour la fonction $\omega_*(x)$ et le développement résonnant pour les fonctions de plasma.

A. Instabilité des modes localisés

Considérons maintenant l'effet de la partie imaginaire du "potentiel" $Q(x)$ que nous avons négligée jusqu'ici. La modification apportée par celle-ci sur la relation de dispersion peut être évaluée à partir de l'équation de dispersion originale : pour cela, multiplions l'équation (3.2) par $\phi^*(x)$ puis intégrons l'équation résultante sur x , nous obtenons après intégration par partie sur le terme contenant la dérivée seconde, l'équation

$$- \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\phi}{dx} \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (Q_R(x) + iQ_I(x)) |\phi(x)|^2 dx = 0 \quad (3.20)$$

En adoptant pour $\phi(x)$ la fonction non-perturbée donnée par (3.14) nous obtenons après quelques algèbres triviales la relation de dispersion complète suivante qui tient compte de l'effet déstabilisant des électrons :

$$I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} + i\sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{(\omega_* - \omega)\omega}{(\omega_* + \omega)\omega_*} \frac{aL_s}{2rx_0} \text{Log} \frac{aL_s}{rx_0} = (2n+1)\frac{a}{r} \frac{\sqrt{2\omega_*\omega}}{\omega_* + \omega} \quad (3.21)$$

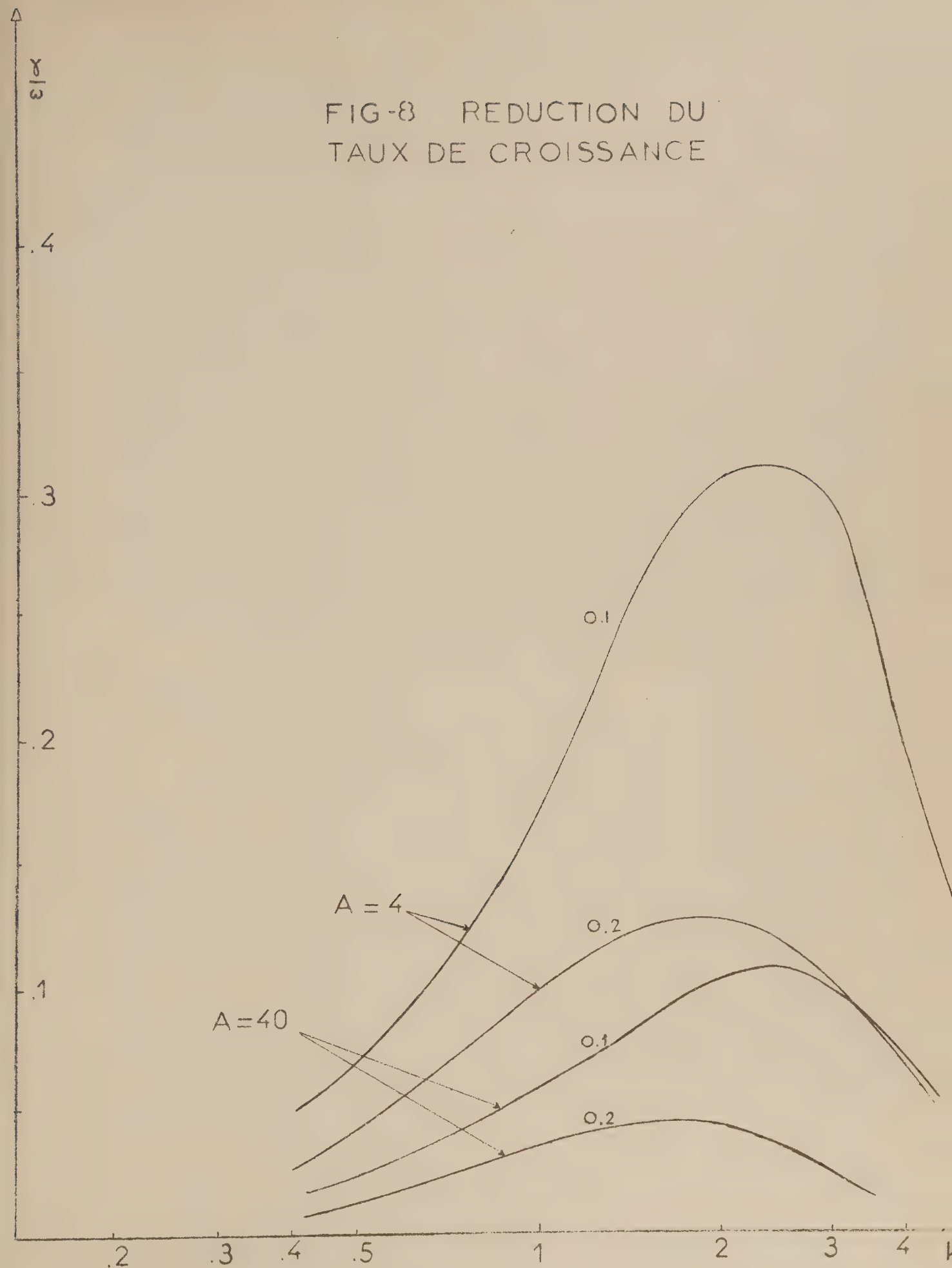
où x_0 est défini par la formule (3.17). Nous obtenons ainsi une relation qui présente une analogie complète avec celle obtenue dans le cas d'un champ magnétique uniforme pour les modes résonnants (relation 2.19) avec une vitesse de phase effective telle que $\langle \frac{\omega}{k_{||} v_e} \rangle = \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{aL_s}{2rx_0} \text{Log} \frac{aL_s}{rx_0}$. En procédant comme dans le cas précédent nous aboutissons à la formule suivante pour le taux de croissance :

$$\frac{\gamma}{\omega_*} = \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{I_0 e^{-b} (1 - I_0 e^{-b})}{(2 - I_0 e^{-b})^3} \frac{aL_s}{2rx_0} \text{Log} \frac{aL_s}{rx_0} \quad (3.22)$$

B. Efficacité de la réduction

La formule (3.22) montre que le taux de croissance est réduit par le facteur caractéristique $\sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{aL_s}{2rx_0}$. La réduction

FIG-8 REDUCTION DU
TAUX DE CROISSANCE



est donc d'autant plus facile que la masse de l'ion est plus lourde et le cisaillement doit être choisi à priori tel que :

$$\frac{L_s}{r} \ll \sqrt{\frac{M a}{\pi m r}} \quad (3.23)$$

Pour montrer que même lorsque le cisaillement reste faible, satisfaisant toutefois à la condition (3.23), le taux de croissance peut être réduit d'une manière notable, nous avons calculé numériquement le taux de croissance pour différentes masses de l'ion et pour des faibles valeurs du cisaillement. Sur la figure 8 nous portons la variation du rapport $\frac{\gamma}{\omega}$ en fonction du nombre b pour différentes valeurs du rapport $\frac{r^2}{aL_s}$. Les résultats numériques confirment effectivement les résultats théoriques et nous trouvons que pour l'argon par exemple, le rapport $\frac{\gamma}{\omega}$ est toujours inférieur à $\frac{1}{10}$ pour un rapport $\frac{r^2}{aL_s}$ égal à $\frac{1}{10}$.

C. Critère de stabilité

La question qui se pose naturellement est de savoir si le cisaillement peut stabiliser complètement les modes et dans l'affirmative, calculer la valeur critique de la longueur de cisaillement L_c . On observe qu'effectivement, lorsque le cisaillement augmente, la zone de localisation des modes, d'après l'équation (3.12), augmente et on conçoit que la stabilité ne peut avoir lieu que si la zone de localisation s'étend sur la région d'absorption Landau des ions définie par $\frac{rx}{aL_s} \gtrsim (\text{Log} \sqrt{\frac{M}{m}})^{-1/2}$. Lorsque cette situation est réalisée, on a une condition suffisante de stabilité dont la démonstration faite par Krall et Rosenbluth consiste à considérer la partie imaginaire de la relation (3.20) qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_I(x) |\phi(x)|^2 dx = 0 \quad (3.24)$$

où $Q_I(x)$ doit être calculé à partir de l'équation originale (3.2) qui donne

$$Q_I(x) = - \frac{\gamma \omega}{2} I_0 e^{-b} \operatorname{Re}(1+W_i) - \sqrt{\pi} I_0 e^{-b} \frac{(\omega + \omega_i)}{k_{\parallel} v_i} e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_i^2}} + \sqrt{\pi} \frac{\omega - \omega_i}{k_{\parallel} v_e}$$

Au voisinage de l'origine, les trois termes constituant $Q_I(x)$, sont petits et ne contribuent pas de manière significative à l'intégrale (3.24). Dans la zone où l'intégrand devient significatif, c'est-à-dire $\frac{\omega}{k_{\parallel} v_i} \approx 1$, le terme relatif aux électrons est d'ordre $\sqrt{\frac{m}{M}}$ par rapport aux deux premiers termes de Q_I . La seule façon pour que (3.24) puisse être satisfaite est que ces deux termes soient de signes opposés, ce qui entraîne $\gamma < 0$ soit une stabilité. Selon Krall et Rosenbluth, le cisaillement critique peut être estimé comme la valeur de L_s nécessaire à inverser la courbure du potentiel $Q_R(x)$ c'est-à-dire pour

$$\frac{L_s}{r} = 2\sqrt{2} \frac{r}{a} \quad (3.25)$$

ce que nous appelons désormais le cisaillement de Krall et Rosenbluth.

On observe que le cisaillement critique est indépendant de la masse des particules et dépend uniquement du nombre de rayon de Larmor contenu dans le profil du plasma. Il s'en suit que les modes seraient d'autant plus difficiles à stabiliser que le rapport $\frac{r}{a}$ est plus petit et dans les plasmas obtenus par exemple dans les machines thermiques (machines Q) le rapport $\frac{r}{a}$ est de l'ordre de 10 et le cisaillement de Krall et Rosenbluth ne peut pas être atteint. Quoiqu'il en soit, nous avons vu que le cisaillement reste un moyen efficace pour réduire les instabilités et nous reviendrons sur ce sujet au chapitre 6.

D. Validité

Dans la précédente approche nous avons supposé que le puits du potentiel est principalement formé par la partie réelle de la fonction $Q(x)$ et nous avons trouvé que le cisaillement critique de stabilisation est indépendant de la masse des particules. Ceci peut s'interpréter par le fait que la région de localisation du mode est principalement déterminée par le gradient de densité mais dans celle-ci les effets, déstabilisant des électrons et stabilisant des ions sont faibles si bien que le critère de stabilité est peu sensible aux paramètres des particules.

Pour que le traitement par perturbation soit correct, il suffit que le terme déstabilisant de la relation de dispersion, dû aux électrons soit petit devant les termes principaux, ce qui d'après (3.21) exige

$$\sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega} \frac{a L_s}{2 r x_0} < (2n+1) \frac{a}{r} \frac{\sqrt{2\omega_* \omega}}{\omega_* + \omega}$$

soit pour les modes les plus difficiles à remplir, la condition

$$b \sqrt{\frac{\pi a m}{8 r M}} \frac{L_s}{r} < 1 \quad (3.26)$$

qui peut être considérée comme une condition de faible instabilité. Comme nous nous plaçons dans la situation des faibles cisaillements qui ne peut être compatible avec la condition de faible instabilité (3.26) que si nous avons un système dont le nombre de rayon de Larmor contenu dans le profil de la densité satisfait la condition

$$\frac{r}{a} < \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \quad (3.27)$$

Il s'en suit que le critère de stabilité donné par Krall et Rosenbluth ne peut pas être généralisé aux systèmes ayant $\frac{r}{a} > \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ que nous examinerons dans le paragraphe suivant.

3.2. Limite des forts cisaillements

Dans ce paragraphe nous nous consacrons au problème des modes normaux dans les grands systèmes, à savoir, $\frac{r}{a} \gg \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ pour lesquels nous avons vu qu'en dessous du cisaillement de Krall et Rosenbluth, lorsque le potentiel Q_R a l'aspect d'un puits, les modes traités dans le paragraphe précédent ne sont pas trouvés. Dans cette situation le cisaillement de Krall et Rosenbluth peut facilement être atteint, ce qui nous amène à considérer uniquement la situation des forts cisaillements, c'est-à-dire pour $\frac{L_s}{r} \ll 2\sqrt{2} \frac{r}{a}$ auquel cas la variation de la densité peut être négligée devant celle de la fonction $k_{||}(x)$ dans l'équation (3.2) qu'on peut remettre sous la forme suivante avec des variables réduites :

$$\delta^2 \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + Q(X) \Phi = 0$$

$$\text{où} \quad \delta = \frac{r}{L_s} \sqrt{(I_0 - I_1) e^{-b}}$$

$$X = \frac{\sqrt{2} r x}{a L_s}$$

$$Q = Q_R + iQ_I = I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{(\omega + \omega_*) (1 + W_i)} + \frac{i}{|X|} \left(\frac{\pi m}{2M} \right)^{1/2} \frac{(\omega_* - \omega) \omega}{(\omega_* + \omega) \omega_*}$$

$$W_i = W\left(\frac{\omega}{|X|}\right) \quad (3.28)$$

Dans le domaine résonnant qui constitue le principal domaine d'instabilité, la fonction Q_R prend la forme

$$Q_R = I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega + \omega_*} + \frac{2\omega_*^2}{(\omega + \omega_*)} X^2 \quad (3.29)$$

ce qui correspond à la situation d'une barrière de potentiel qui classiquement ne donne pas lieu à des modes localisés et fait souvent penser que les modes normaux disparaissent dès que le

cisaillement de Krall et Rosenbluth est atteint. Récemment le problème des modes normaux dans le domaine des forts cisaillements a été remis en question par Perlstein et Berk dans un travail qui mérite d'être analysé en détail ici.

Selon ces auteurs, les modes normaux peuvent encore exister lorsque le cisaillement de Krall et Rosenbluth a été franchi : ceux-ci obéissent à d'autres conditions aux limites que celle que nous avons formulées dans le paragraphe précédent à savoir une onde purement évanescence dans la limite $x \rightarrow \pm \infty$. Les conditions aux limites choisies par ces auteurs correspondent au choix d'une fonction propre qui représente, dans la région interne, une onde stationnaire et dans la région externe une onde sortante pure transportant l'énergie en dehors de celui-ci. La méthode développée dans ce travail consiste à considérer la partie imaginaire du potentiel $Q(X)$ comme une perturbation et les fonctions propres sont principalement déterminées par la partie réelle $Q_R(X)$ dans l'approximation résonnante (3.29), celles-ci s'écrivent avec nos notations comme :

$$\Phi(X) = H_n(\sqrt{i\sigma}X) \exp - \frac{i\sigma}{2} X^2 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sigma = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{2\omega_*^2}{(\omega_* + \omega)\omega}} \quad , \quad \text{Re } \sigma > 0$$

où le choix du signe de l'argument de la fonction exponentielle est essentiel car il doit correspondre à une onde ayant une vitesse de groupe dirigée vers l'extérieur. En évaluant ensuite Q_I au point tournant X_0 , la règle de quantification donne la relation de dispersion suivante :

$$I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} + \frac{i}{|X_0|} \left(\frac{\pi m}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\omega_* - \omega)\omega}{(\omega_* + \omega)\omega_*} = i(2n+1)\delta \sqrt{\frac{2\omega_*^2}{(\omega_* + \omega)\omega}}$$

qui montre qu'en l'absence de l'effet déstabilisant des électrons on obtiendrait des modes amortis qui proviennent du transport d'énergie en dehors du système.

Le critère de stabilité s'obtient ainsi en équilibrant les processus de gain dû à l'instabilité et de pertue due au transport et on obtient d'après Pearlstein et Berk le cisaillement critique donné par

$$\frac{L_c}{r} = \frac{1}{b^{2/3}} \sqrt[3]{\frac{M}{\pi m}} \quad (3.30)$$

Avant d'aller plus loin, nous devons faire deux importantes observations au sujet de cette approche et des résultats obtenus. En premier lieu, il est clair que le traitement par perturbation ci-dessus n'est satisfaisant que dans la limite des cisaillements tels que $\frac{L_s}{r} < \sqrt[3]{\frac{M}{\pi m}}$, et il s'en suit que pour les systèmes ayant un grand rapport $\frac{r}{a}$, il existe un domaine du cisaillement supérieur à celui de Krall et Rosenbluth tout en étant inférieur à celui de Pearlstein et Berk tel que $\sqrt[3]{\frac{M}{m}} < \frac{L_s}{r} < \frac{r}{a}$ où le traitement précédent n'est pas valable et la question de stabilité des modes reste à étudier.

En second lieu, sans évoquer l'effet d'absorption des ions, en choisissant dans cette théorie une fonction propre qui se

comporte comme une solution B.K.W. pure non subdominante sur l'axe réel à l'infini on peut prolonger analytiquement celle-ci sur l'axe réel tout entier car les lignes Anti-Stokes issues du point tournant ne traversent pas l'axe réel (Cf. figure 9), on ne peut pas obtenir une fonction propre se comportant comme une onde stationnaire dans la zone centrale.

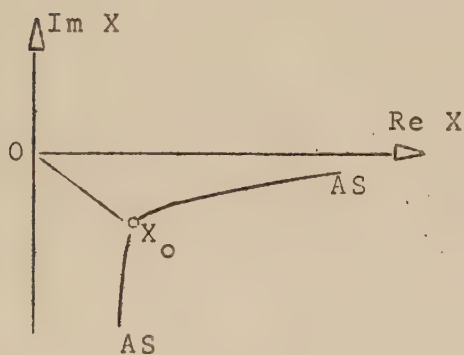


Figure 9

Diagramme de Stokes

L'objet de ce paragraphe consiste précisément à reformuler le problème mathématique posé par l'équation différentielle (3.28) et de trouver une solution valable dans un large domaine du cisaillement.

En réalité on doit considérer l'équation différentielle précédente comme une équation radiale en raison de son invariance par parité, ce qui permet de supprimer le signe de la valeur absolue du terme $\frac{1}{X}$ contenu dans $Q(X)$. Cette équation définit maintenant une fonction $\Phi(X)$ analytique dans le demi-plan $\text{Re} X > 0$.

Si nous imposons à la fonction propre d'être nulle pour $X \rightarrow +\infty$ nous avons alors une fonction B.K.W. pure et celle-ci ne peut l'être que pour $X \gg 1$ où les fonctions B.K.W. se comportent comme $\Phi_{\text{BKW}}(X) \approx \exp \pm \sigma X^{3/2}$ où $\sigma = \frac{2}{3\delta} \sqrt{\frac{1\omega_*}{\omega_* + \omega}}$; $\text{Re } \sigma > 0$. La détermination qui décroît vers zéro à l'infini correspond au signe - et nous avons une onde qui se comporte exactement suivant les conditions imposées par Pearlstein et Berk. Pour traiter ce problème radial nous imposerons à la fonction propre la condition supplémentaire d'être régulière à l'origine à savoir $\Phi(X) \rightarrow 0$ pour $X \rightarrow 0$. On peut ramener le problème radial au problème classique où la fonction propre obéit aux conditions d'être nulle à $\pm \infty$ en utilisant la transformation suivante :

$$\begin{aligned} X &= e^z \\ \Phi(X) &= e^{z/2} U(z) \end{aligned} \quad (3.31)$$

la nouvelle fonction $U(z)$ ainsi définie satisfait aux conditions habituelles $U(z) \rightarrow 0$ pour $z \rightarrow \pm \infty$ et vérifie l'équation différentielle

$$\delta^2 \frac{d^2 U(z)}{dz^2} + e^{2z} \left\{ Q(e^z) - \frac{\delta^2}{4e^{2z}} \right\} U(z) = 0 \quad (3.32)$$

qui possède la même structure que l'équation type (3.3) et on peut appliquer pour celle-ci la règle de quantification relative aux modes propres. Cette relation dans ce cas s'écrit :

$$\oint \sqrt{Q(e^z) - \frac{\delta^2}{4e^{2z}}} e^z dz = (n + \frac{1}{2}) \pi \delta$$

ou en revenant vers la variable X :

$$\oint \sqrt{Q(X) - \frac{\delta^2}{4X^2}} dX = (n + \frac{1}{2}) \pi \delta \quad (3.33)$$

On voit ainsi que le problème radial diffère du problème aux conditions aux limites $(-\infty, +\infty)$ par l'introduction d'un terme extra $-\frac{\delta^2}{4X^2}$ sur le "potentiel" $Q(X)$.

Si on admet que les points tournants restent localisés dans la région résonnante, on peut prendre pour la fonction $Q(X)$ figurant dans la relation (3.33) son approximation résonnante qu'on peut écrire comme

$$\begin{aligned}
 Q(X) &= \lambda + \alpha X^2 + \frac{iq}{X} \\
 \text{où} \quad \lambda &= I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} \\
 \alpha &= \frac{2\omega_*^2}{\omega(\omega_* + \omega)} \\
 q &= \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{\omega(\omega_* - \omega)}{\omega_* (\omega_* + \omega)} \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

La formule de quantification s'écrit alors :

$$\oint \sqrt{\lambda + \alpha X^2 + \frac{iq}{X} - \frac{\delta^2}{4X^2}} dX = (n + \frac{1}{2})\pi\delta \quad (3.35)$$

On a ainsi affaire à une intégrale du type elliptique qui peut cependant être ramenée aux intégrales classiques dans les deux limites opposées du cisaillement que nous considérons successivement ci-dessous.

a) Limite des très forts cisaillements

Lorsque le terme $\frac{q}{X}$ peut être considéré comme petit vis à vis des autres termes de l'intégrale (3.35) sur le chemin reliant les points tournants, nous pouvons approximer (3.35) comme :

$$\oint \sqrt{\lambda + \alpha X^2 - \frac{\delta^2}{4X^2}} dX + \frac{iq}{2} \oint \frac{dX}{X \sqrt{\lambda + \alpha X^2 - \frac{\delta^2}{4X^2}}} = (n + \frac{1}{2})\pi\delta \quad (3.36)$$

où l'intégration est prise entre les deux points tournants à partie réelle positive de l'équation

$$\alpha X^4 + \lambda X^2 - \frac{\delta^2}{4} = 0 \quad (3.37)$$

Ignorons temporairement le terme de perturbation et en faisant les changements de variable :

$$X = \sqrt{-i} t$$

$$\lambda = i\lambda'$$

nous avons

$$\oint \sqrt{\lambda + \alpha X^2 - \frac{\delta^2}{4X^2}} dX = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\lambda'}{\sqrt{\alpha}} - \delta \right) \quad (3.38)$$

ce qui donne la relation de dispersion en première approximation sous la forme :

$$\lambda \equiv I_0 e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} = i(4n+3)\delta \sqrt{\frac{2\omega_*^2}{(\omega_* + \omega)\omega}} \quad (3.39)$$

où le second membre est petit. En posant $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ avec $|\frac{\delta\omega}{\omega_0}| \ll 1$, on obtient

$$\frac{\omega}{\omega_*} = \frac{I_0 e^{-b}}{2 - I_0 e^{-b}} - \frac{2i(4n+3)}{2 - I_0 e^{-b}} \frac{r}{L_s} \sqrt{\frac{I_0 - I_1}{I_0}} \quad (3.40)$$

on trouve alors des modes amortis.

En portant l'expression de ω dans les relations (3.39) et (3.34) on obtient :

$$\lambda = i(4n+2) \frac{r}{L_s} (2 - I_0 e^{-b}) \sqrt{\frac{I_0 - I_1}{I_0}}$$

$$q = \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{I_0 e^{-b} (1 - I_0 e^{-b})}{2 - I_0 e^{-b}} \quad (3.41)$$

ce qui donne pour le terme de perturbation négligé primitivement dans (3.36) :

$$\frac{q}{2} \int \frac{dX}{X \sqrt{\lambda + \alpha X^2 - \frac{\delta^2}{4X^2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi m L_s}{(4n+3)Mr}} \frac{I_o e^{-b} (1 - I_o e^{-b})}{2 - I_o e^{-b}} \left(\frac{I_o / (I_o - I_1)}{2 - I_o e^{-b}} \right)^{1/4} \quad (3.42)$$

En portant cette expression dans (3.36) on obtient la relation de dispersion qui s'écrit avec ce terme correctif comme :

$$I_o e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} = i \left\{ (4n+3) \frac{r}{L_s} \sqrt{(I_o - I_1) e^{-b}} - 2 \sqrt{\frac{m L_s}{\pi (4n+3)Mr}} \frac{I_o e^{-b} (1 - I_o e^{-b})}{2 - I_o e^{-b}} \left(\frac{I_o / (I_o - I_1)}{2 - I_o e^{-b}} \right)^{1/4} \right\} \sqrt{\frac{2\omega_*^2}{(\omega_* + \omega)}} \quad (3.43)$$

On voit donc que les modes, par cet effet Landau inverse des électrons sont déstabilisés. Pour les modes les plus déstabilisés ($n = 0$), les fréquences des modes deviennent purement réelles lorsque le second membre de (3.43) s'annule, c'est-à-dire si :

$$\frac{L_s}{r} = \frac{3}{b^{2/3}} \sqrt[3]{\frac{\pi M}{m}} \quad \text{pour} \quad b \ll 1 \quad (3.44)$$

$$\frac{L_s}{r} = 3 \sqrt[3]{\frac{\pi M}{m}} \quad \text{pour} \quad b \gg 1$$

Pour les modes à $b < 1$, Beck et Pearlstein ont obtenu un résultat analogue au nôtre et ces auteurs ont conclu que le cisaillement critique est donné par $\frac{L_s}{r} = \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \frac{1}{b^{2/3}}$. En réalité nous voyons que lorsque le rapport $\frac{L_s}{r}$ tend vers cette valeur, le traitement précédent n'est plus valable, car celui-ci est reposé sur la perturbation : en évaluant le terme $\frac{q}{X}$ au voisinage des points tournants dont les affixes avec la formule (3.41) sont

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{ir}{L_s}} \left[(I_o - I_1) e^{-b} \right]^{1/4} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{(4n+3)^2}} \right) \quad (3.45)$$

nous obtenons pour les modes de grandes longueurs d'onde et pour $n = 0$:

$$\frac{q}{|X_o|} \approx \sqrt{\frac{\pi m L_s}{Mr}} b$$

$$|X_o|^2 \approx \frac{3r}{L_s}$$

Ces deux termes deviennent équivalents lorsque $\frac{L_s}{r} \approx \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \frac{1}{b^{2/3}}$, il s'en suit que pour $\frac{L_s}{r} \rightarrow \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \frac{1}{b^{2/3}}$ le taux d'amortissement tend vers zéro, en même temps l'approximation par perturbation cesse d'être valable et les résultats développés dans cette section ne peuvent pas être extrapolés au domaine des cisaillements tels que $\frac{L_s}{r} > \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ auquel un traitement spécial doit être fait. Nous considérerons de plus près ce domaine dans le paragraphe suivant.

b) Limites des cisaillements modérément forts

Il nous reste à examiner la situation des cisaillements tels que $\frac{L_s}{r} > \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ pour laquelle le terme $\frac{q}{X}$ de l'intégrale (3.35) ne peut plus être considéré comme une petite perturbation. Nous postulons dans ce cas que c'est le terme αX^2 qui représente une correction négligeable. En faisant ensuite le changement de variable $X = -iy$ dans la relation (3.35) nous avons :

$$\oint \sqrt{\lambda + \frac{iq}{X} - \frac{\delta^2}{4X^2}} dX = \oint \sqrt{-\lambda y^2 + qy - \frac{\delta^2}{4}} \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{\lambda}} - \delta \right) \quad (3.46)$$

et la relation de dispersion s'écrit :

$$\lambda \equiv I_o e^{-b} - \frac{2\omega}{\omega_* + \omega} = \frac{1}{n^2} \frac{\pi m}{M(I_o - I_1) e^{-b}} \left[\frac{\omega(\omega_* - \omega)}{\omega_* (\omega_* + \omega)} \frac{L_s}{r} \right]^2; \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

On obtient ainsi une équation du quatrième degré en ω , mais en considérant les solutions voisines de la valeur $\frac{\omega_* I_o e^{-b}}{2 - I_o e^{-b}}$ donnée

habituellement, nous pouvons ramener l'équation (3.47) sous la forme d'une équation du second degré qui s'écrit comme

$$\frac{1}{n^2} \frac{\pi m L_s^2}{Mr^2} \frac{I_o}{I_o - I_1} \frac{I_o e^{-b}}{(2 - I_o e^{-b})^2} \left(\frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega} \right)^2 - \frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega} + 1 - I_o e^{-b} = 0 \quad (3.48)$$

Cette équation admettrait deux racines complexes conjuguées lorsque le discriminant est négatif, soit pour

$$\frac{L_s}{r} > \sqrt{\frac{M}{\pi m b}} \quad \frac{n}{2} \quad \text{pour} \quad b \ll 1 \quad (3.49)$$

$$\frac{L_s}{r} > \sqrt{\frac{M}{\pi m}} \quad n \quad \text{pour} \quad b \gg 1$$

On obtiendrait lorsque ces conditions sont remplies un mode instable, les modes les plus difficiles à stabiliser correspondent donc à $n = 1$. Pour ceux-ci, lorsque le cisaillement est inférieur au cisaillement de Berk et Pearlstein tout en satisfaisant à la condition $\sqrt[3]{\frac{M}{m}} < \frac{L_s}{r} < \sqrt{\frac{M}{m}}$, les modes restent stables. Le véritable critère de stabilité est donc donné par la condition

$$\frac{L_s}{r} \leq \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (3.50)$$

Il nous reste à vérifier notre hypothèse simplificatrice, on a en effet d'après (3.47), pour $b < 1$.

$$\lambda = \frac{b^2}{n^2} \frac{\pi m L_s^2}{M r^2}$$

$$q = \sqrt{\frac{\pi m}{M}} b$$

ce qui donne pour les bornes supérieure et inférieure de (3.46) :

$$y_{1,2} = \frac{n^2}{2b} \sqrt{\frac{M}{\pi m}} \frac{r^2}{L_s^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

les points tournants X_1 et X_2 appartiennent au domaine résonnant si $\sqrt{\frac{m}{M}} \ll X_{1,2} \ll 1$, soit pour $\frac{L_s}{r} < \sqrt{\frac{M}{m}}$ et le terme αX^2 est négligeable devant le terme $\frac{\delta^2}{4X^2}$ si $\frac{L_s}{r} > \sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ ce qui correspond effectivement au domaine de stabilité.

4. CONCLUSION

Nous avons analysé le problème des modes normaux et nous avons trouvé deux situations intéressantes :

i) Dans les systèmes ayant un rapport $\frac{r}{a}$ peu élevé, les modes normaux sont stabilisables par un cisaillement de l'ordre de celui de Krall et Rosenbluth et quoique cette condition soit difficile à réaliser, le cisaillement reste une méthode efficace pour réduire l'instabilité.

ii) Dans les systèmes ayant un grand rapport $\frac{r}{a}$, on trouve encore des modes normaux instables mêmes si le cisaillement est supérieur à celui de Krall et Rosenbluth. Pour ces systèmes, deux situations peuvent se rencontrer.

a) Lorsque le rapport $\frac{L_s}{r}$ est inférieur à $\sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ tous les modes normaux sont amortis.

b) Lorsque le nombre $\frac{L_s}{r}$ est tel que $\sqrt[3]{\frac{M}{m}} < \frac{L_s}{r} < \sqrt{\frac{M}{m}}$ les modes normaux sont amortis.

Nous avons ainsi montré que le traitement donné par Berk et Pearlstein qui consiste à considérer le domaine des forts cisaillements pour évaluer le cisaillement critique n'est pas adéquat et le résultat exact du cisaillement est moins sévère que celui donné par ces auteurs.

C H A P I T R E I V

INSTABILITE CONVECTIVE

Dans ce chapitre nous considérons la situation où les modes normaux ont été supprimés ou stabilisés par un cisaillement suffisant et nous montrons qu'en dessous d'une certaine valeur critique du cisaillement le système peut être instable vis à vis des modes convectifs dont nous exposons ci-dessous la nature de l'instabilité puis nous calculerons explicitement le cisaillement critique.

1. NOTION DES INSTABILITES CONVECTIVES

Nous supposons maintenant que la perturbation se comporte comme une superposition des modes ayant chacun une fréquence ω de la forme d'un paquet d'onde :

$$\phi(r,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\phi}(x,\omega) \exp - i(\omega t - K r) \quad (4.1)$$

Lorsque les modes normaux ont été stabilisés, le système reste localement instable dans la région des vitesses de phase locales résonnantes et le paquet d'onde peut s'y amplifier jusqu'à un niveau dangereux pour le confinement avant d'atteindre la région d'absorption des ions où le paquet d'onde s'amortit. Bien qu'un paquet d'onde finisse par s'amortir, le système est le siège d'une instabilité transitoire pendant la propagation du paquet d'onde, appelée instabilité convective. Cette question relative aux modes de dérive a été considérée pour la première fois par Coppi, Laval, Pellat et Rosenbluth, puis elle a été reformulée par Frieman et Rutherford ainsi que par Davidson et Kamash⁽¹⁴⁾. Dans ce travail nous adoptons le point de vue des premiers auteurs

pour déterminer le cisaillement critique de stabilité vis à vis des paquets d'onde.

2. CRITERE DE STABILITE

Nous avons montré précédemment que les modes normaux ne sont stabilisés que pour des cisaillements supérieurs à celui de Krall et Rosenbluth, dans cette limite chaque mode individuel satisfait à l'équation que nous avons étudiée dans la situation des forts cisaillements. En adoptant les mêmes notations que dans le cas précédent, l'équation différentielle vérifiée par chaque mode individuel s'écrit :

$$\delta^2 \frac{d^2 \Phi}{dX^2} + Q(X, \omega) \Phi = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{où} \quad X = \frac{rx}{aL_s} \sqrt{2} ; \quad \delta = \frac{r}{L_s} ; \quad \lambda = \frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega} - b ; \quad q = \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{\omega(\omega_* - \omega)}{\omega_* (\omega_* + \omega)}$$

$$\alpha = \frac{\omega_*^2}{\omega(\omega_* + \omega)}$$

$$Q \equiv Q_R + iQ_I = \lambda + \alpha X^2 + \frac{iq}{X} \quad (4.3)$$

où nous nous sommes limités aux modes ayant une grande longueur d'onde ($b < 1$) et nous avons considéré seulement la zone résonnante délimitée par $X_1 < X < X_2$ avec

$$X_1 \approx \sqrt{\frac{m}{M}}$$

$$X_2 \approx 1/\sqrt{\text{Log} \left(\frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega} \right) \sqrt{\frac{M}{m}}} \quad (4.4)$$

La fonction $\Phi(X)$ dans ce cas n'obéit plus à la condition d'être nulle à la fois à l'origine et à l'infini comme pour le cas des normaux. La condition imposée à $\Phi(X)$ est que celle-ci se comporte comme une onde libre à l'infini. Celle-ci peut être

décrite dans l'approximation B.K.W. comme

$$\Phi(X) \approx \exp \pm i(\omega t - \int^X k_X dX) \quad (4.5)$$

où $k_X^2 = \frac{Q(X, \omega)}{\delta^2}$ et on choisit pour k_X la détermination à partie réelle positive.

La formule (4.5) montre que la vitesse de groupe a le même signe que la fonction $\text{Im } k_X$, ce qui montre que l'onde subit toujours une amplification quel que soit le sens de sa propagation et nous considérerons celle qui se comporte à l'infini comme une onde entrante correspondant au choix du signe, dans la formule (4.5). Le nombre d'exponentiation n_0 subie par l'onde est donc :

$$n_0 = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \text{Im } k_X dX \quad (4.6)$$

où $X_{\max}$ et $X_{\min}$ sont les deux limites de la zone amplifiante. Avec le choix de notre condition aux limites on a $X_{\max} = X_2$ et $X_{\min}$ est égal à X_0 si les lignes Anti-Stokes ne traversent pas l'axe réel X , dans le cas contraire il doit être pris comme le point d'intersection de la ligne Anti-Stokes avec l'axe réel.

Dans le cas où nous avons $Q_I \ll Q_R$ dans tout l'intervalle d'intégration, nous pouvons approximer $\text{Im } k_X$ comme

$$\text{Im } k_X = \frac{Q_I(X)}{2\sqrt{Q_R(X)}} \quad (4.7)$$

d'où

$$n_0 = \sqrt{\frac{\pi m}{4M}} \frac{L_s}{r} \frac{\omega(\omega_* - \omega)}{\omega_* (\omega_* + \omega)} \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} \frac{dX}{X \sqrt{\lambda + \alpha X^2}} \quad (4.8)$$

le domaine qui contribue principalement à l'intégrale se situe dans les petites valeurs de X , ce qui donne :

$$n_0 = \sqrt{\frac{\pi m}{4M}} \frac{L_s}{r} \frac{\omega(\omega_* - \omega)}{\omega_* (\omega_* + \omega)} \frac{\text{Log} \sqrt{\frac{M}{m}} \text{Log} \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega}}}{\sqrt{\frac{\omega_* - \omega}{\omega_* + \omega}} - b} \quad (4.9)$$

Pour des valeurs générales de $\frac{\omega}{\omega_*}$ et b , le cisaillement critique qui correspond à $n_0 = 1$ est de l'ordre

$$\frac{L_s}{r} \approx \sqrt{\frac{4M}{\pi m}} \text{Log} \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (4.10)$$

ce résultat a été obtenu par Coppi et les co-auteurs. Dans le cas limite, où $\frac{\omega}{\omega_*}$ tend vers $\frac{1-b}{1+b}$, la formule (4.9) exigerait un cisaillement critique infiniment grand mais cette divergence n'est en fait qu'apparente car nous aurons dans ce cas

$$Q_R(X) \approx \frac{2\omega_*^2}{\omega(\omega_* + \omega)} X^2$$

$$Q_I(X) \approx \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{b\omega}{\omega_*} \frac{1}{X}$$

l'hypothèse $\frac{Q_I(X)}{Q_R(X)} \ll 1$ qui conduit à la formule (4.7) tombe en défaut pour $X < (\frac{\pi m}{M})^{1/6} b^{1/3}$ et ce cas limite doit être reconsidéré.

L'équation différentielle (4.3) se réduit lorsque $\frac{\omega}{\omega_*} \rightarrow \frac{1-b}{1+b}$ à

$$\delta^2 \frac{d^2 \Phi}{dX^2} + \left(\frac{2\omega_*^2 X^2}{(\omega + \omega_*)\omega} + \frac{i}{X} \sqrt{\frac{\pi m}{M}} b \frac{\omega}{\omega_*} \right) \Phi = 0 \quad (4.11)$$

Le diagramme de Stokes associé à cette équation montre qu'il y a un point tournant X_0 donné par

$$X_0 = e^{-\frac{i\pi}{6}} \left(\frac{\pi m}{M} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{\omega}{\omega_*} \left(\frac{\omega + \omega_*}{\omega} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.12)$$

Nous pouvons constater qu'une ligne Anti-Stokes issue de X_0 coupe l'axe réel en un point d'abscisse de l'ordre de celle de X_0 et le diagramme de Stokes est illustré sur la figure 10

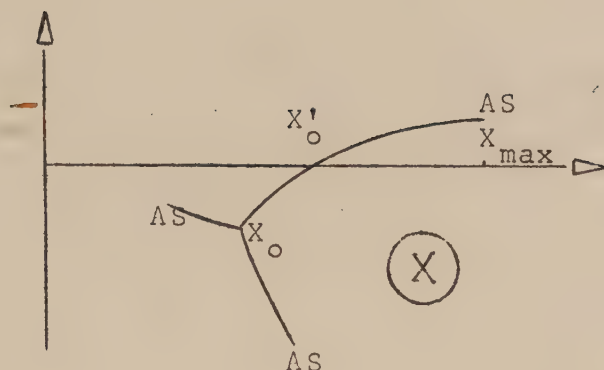


Figure 10

Diagramme de Stokes

$$n_0 = \frac{L_s}{r} \sqrt{\frac{\pi m}{4M}} b \int_{X'_0}^{X_{\max}} \frac{dX}{X^2}$$

$$\approx \frac{L_s}{r} \left(\frac{\pi m}{M}\right)^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{X'_0}{X_{\max}}\right) \quad (4.13)$$

Pour des atomes de masse lourde, nous avons $\frac{X'_0}{X_{\max}} \ll 1$ et nous obtenons le cisaillement critique donné par :

$$\frac{L_s}{r} \approx \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \frac{1}{b^{2/3}} \quad (4.14)$$

et cette valeur est en accord avec les résultats obtenus par Frieman et Rutherford. Nous avons alors une condition formellement plus sévère que celle de Coppi et alii.

En pratique, pour des noyaux légers, le rapport $\frac{X'_0}{X_{\max}}$ est de l'ordre $\frac{1}{2}$, ce qui donne dans ce cas un oscillement critique peu différent de celui de Coppi et alii.

3. CONCLUSION

Nous venons de montrer que l'analyse par les modes normaux est insuffisante et doit être complétée par celle des paquets d'onde dans le cas où le rapport caractéristique $\frac{r}{a}$ est supérieur à $\sqrt[3]{\frac{M}{m}}$ où le cisaillement critique de stabilité vis à vis des paquets d'onde est plus sévère que celui requis pour la stabilité des modes normaux.

o o
o

C H A P I T R E V

EQUATIONS DE LA TURBULENCE FAIBLE DANS LES SYSTEMES INHOMOGENES

Nous nous consacrons maintenant à étudier les systèmes ayant un nombre $\frac{r}{a}$ peu élevé pour lesquels la stabilisation complète par le cisaillement est quasiment impossible. Néanmoins pour ceux-ci le cisaillement constitue un moyen efficace pour réduire les instabilités et nous considérons maintenant les systèmes ainsi ramenés à un état faiblement instable par un cisaillement modéré et nous nous proposons d'étudier la relaxation des oscillations dans le cadre d'interaction non-linéaire par les ondes.

Pour ce faire, nous faisons largement appel à la théorie de la turbulence faible dont les bases ont été jetées par Kadomtsev⁽¹⁸⁾ et le groupe des trois auteurs, Galeev, Karpman et Sagdeev⁽¹⁹⁾. Notons toutefois que les théories développées par ces auteurs qui sont destinées aux systèmes spatialement homogènes et l'équation pas cinétique d'onde repose sur un développement de Fourier pour les variables d'espace, ce qui n'est pas valable dans le cas présent où les fonctions propres sont localisées dans l'espace d'inhomogénéité. Il s'en suit qu'une reformulation de la théorie de la turbulence faible adaptée aux systèmes inhomogènes serait nécessaire, ce qui a fait l'objet de notre communication à la Conférence sur la Fusion Contrôlée à Novosibirsk⁽¹⁶⁾ (en collaboration avec Coppi, Laval et Pellat). Dans ce chapitre après avoir établi les équations de base valables dans le cas général, nous montrons en détail la transposition de l'équation cinétique des ondes de dérive établie dans l'approximation des ondes planes au cas exact des modes propres localisés.

1. MISE EN EQUATION

Dans le cadre linéaire, nous avons vu que les modes propres sont localisés dans l'espace x et stationnaires dans les espaces y et z , les fonctions propres ont la forme :

$$\phi(r,t) = \phi_K^n(x) \exp - i(\omega t - K_{\perp} r) \quad \dots$$

où m est un nombre entier et $K_{\perp}$ le vecteur d'onde n'ayant que les composantes K_y et K_z .

Dans le cadre non-linéaire, nous supposons que les caractères essentiels de l'onde restent conservés et nous pouvons mettre la fonction du potentiel électrique sous la forme :

$$\phi(r,t) = \sum_k C_k(t) \phi_K^n(x) \exp - i(\omega t - K_{\perp} r) \quad (5.1)$$

où C_k est une fonction à variation lente par rapport aux oscillations et nous avons adopté pour k les symboles suivants :

- en indice, k représente l'ensemble $K_{\perp}, n$
- sous le signe de la sommation, k représente l'ensemble (K, n, ω) .

Suivant la méthode usuelle, nous décomposons la fonction de distribution en une partie à variation lente f^0 et une partie à variante rapide δf (ou fluctuation). Les fluctuations sont reliées au potentiel ϕ par l'intermédiaire des équations de Vlasov et de Poisson qui s'écrivent comme

$$\frac{d}{dt} \delta f = \frac{q}{m} \nabla_{\perp} \phi \frac{\partial}{\partial v} (f^0 + \delta f) \quad (5.2)$$

$$\nabla^2 \phi + 4\pi \sum_j q_j \int dv_j \delta f_j = 0 \quad (5.3)$$

En considérant le potentiel comme une perturbation, on calcule les fluctuations par la méthode itérative qui consiste à décomposer δf sous la forme :

$$\delta f = \delta f^{(1)} + \delta f^{(2)} + \delta f^{(3)} + \dots \quad (5.4)$$

où les deux perturbations successives sont reliées d'après (5.2) par la formule

$$\delta f^{(n+1)} = \frac{q}{m} \oint dt \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f^{(n)} \quad (5.5)$$

Nous calculons les trois premiers termes de la perturbation en appendice où nous montrons qu'ils peuvent se mettre sous la forme symbolique suivante :

$$\begin{aligned} |\delta f^{(1)}\rangle &= \frac{q}{T} \sum_k C_k \hat{\mu}_k |k\rangle \exp - i\omega t \\ |\delta f^{(2)}\rangle &= \frac{q}{T} \sum_{k', k''} C_{k'} C_{k''} \hat{\mu}_{k', k''} |k'; k''\rangle \exp - i(\omega' + \omega'')t \\ |\delta f^{(3)}\rangle &= \frac{q}{T} \sum_{k', k'', k'''} C_{k'} C_{k''} C_{k'''} \hat{\mu}_{k', k'', k'''} |k'; k''; k'''\rangle \exp - i(\omega' + \omega'' + \omega''')t \end{aligned} \quad (5.6)$$

où nous avons utilisé les symboles :

- $|k\rangle$ pour désigner l'état propre représenté par l'ensemble $\{k\}$; $|k', k''\rangle$ et $|k'; k''; k'''\rangle$ désignent respectivement le produit tensoriel de deux et trois états propres.

- $\hat{\mu}_k, \hat{\mu}_{k', k''}, \hat{\mu}_{k', k'', k'''}$ sont les opérateurs, fonctionnelles des opérateurs notés $\hat{k}$ définis comme un opérateur de composantes $(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, K_y, K_z)$ n'agissant que sur l'état $|k\rangle$ caractérisé par les mêmes éléments que $\hat{k}$.

Espace de Fourier

Projetons maintenant les équations (5.6) sur un mode propre puis effectuons une décomposition de Fourier sur le temps, nous obtenons pour les composantes de Fourier généralisées des fluctuations les expressions :

$$\delta f_k^{(1)} = \frac{q}{T} C_k \langle k | \hat{\mu}_k | k \rangle$$

$$\delta f_k^{(2)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k''} C_k C_{k''} \langle k | \hat{\mu}_{k', k''} | k'; k'' \rangle$$

$$\delta f_k^{(3)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k'', k'''} C_k C_{k''} C_{k'''} \langle k | \hat{\mu}_{k', k'', k'''} | k'; k''; k''' \rangle \quad (5.7)$$

où nous avons introduit la notation des produits scalaires définis comme :

$$\langle f | g \rangle = \int d_3 r f^*(r) g(r) \quad (5.8)$$

Remarquons qu'à cause du fait que les opérateurs $\hat{\mu}$ agissent uniquement sur l'espace x , les produits scalaires figurant aux seconds membres de (5.7) contiennent le facteur $\delta(K-K'-K'')$ pour $\delta f_k^{(2)}$ et $\delta(K-K'-K''-K''')$ pour $\delta f_k^{(3)}$ mais nous n'avons rien sur les nombres radiaux n car les opérateurs $\hat{\mu}$ ne sont pas diagonaux dans la représentation $|k\rangle$, ce qui motive la conservation de tous les indices k sous le signe de la sommation et nous pouvons réécrire les équations (5.7) sous la forme

$$\delta f_k^{(1)} = \frac{q}{T} C_k \mu_k^{(1)}$$

$$\delta f_k^{(2)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k''} C_k C_{k''} \mu_{k, k', k''}^{(2)} \delta(K-K'-K'')$$

$$\delta f_k^{(3)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k'', k'''} C_k C_{k''} C_{k'''} \mu_{k, k', k'', k'''}^{(3)} \delta(K-K'-K''-K''') \quad (5.9)$$

qui définit par comparaison avec (5.7) les quantités μ_k , $\mu_{k, k', k''}$, $\mu_{k, k', k'', k'''}$.

Les perturbations de la densité peuvent ainsi s'écrire sous la forme :

$$\delta n_k^{(1)} = \frac{q}{T} V_k^{(1)} C_k$$

$$\delta n_k^{(2)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k''} V_{k, k', k''}^{(2)} C_{k'} C_{k''} \delta(K - K' - K'')$$

$$\delta n_k^{(3)} = \frac{q}{T} \sum_{k', k'', k'''} V_{k, k', k'', k'''}^{(3)} C_{k'} C_{k''} C_{k'''} \delta(K - K' - K'' - K''') \quad (5.10)$$

où les perméabilités $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)}$ s'obtiennent en intégrant respectivement les quantités $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ sur l'espace des vitesses. Nous montrons en appendice qu'elles ont pour expressions explicites suivantes

$$V_k^{(1)} = \langle \tilde{\phi}_k | 1 - \frac{\omega + \omega_*}{\omega} \beta_s(k) (1 + W(\frac{\omega}{k_{||} v_i})) | \tilde{\phi}_k \rangle$$

$$V_{kk'k''}^{(2)} = - \frac{ie}{B} \langle \tilde{\phi}_k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') Z^{(2)}(k_{||}, k'_{||}, k''_{||}) | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''} \rangle$$

$$V_{kk'k''k'''}^{(3)} = - \frac{c^2}{B^2} \langle \tilde{\phi}_k | (\hat{k}' \times (\hat{k}'' + \hat{k}'''))_{||} (\hat{k}'' \times \hat{k}''')_{||} \Xi(k', k'', k''') Z^{(3)}(k_{||}, k'_{||}, k''_{||}, k'''_{||}) \times | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''}, \tilde{\phi}_{k'''} \rangle \quad (5.11)$$

où nous avons posé :

$$\beta_s(\hat{k}) = \int_0^\infty dt J_0^2(\hat{k}_\perp a \sqrt{t}) e^{-t}$$

$$\chi(\hat{k}', \hat{k}'') = \int_0^\infty dt J_0(\hat{k}'_\perp a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}''_\perp a \sqrt{t}) J_0(|\hat{k}' + \hat{k}''| a \sqrt{t}) e^{-t}$$

$$\Xi(k', k'', k''') = \int_0^\infty dt J_0(\hat{k}'_\perp a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}''_\perp a \sqrt{t}) J_0(|\hat{k}' + \hat{k}'' + \hat{k}'''| a \sqrt{t}) J_0(k'''_{||} a \sqrt{t}) e^{-t}$$

$$Z^{(2)}(k_{||}, k'_{||}, k''_{||}) = \int \frac{dv f_o(v)}{\omega - k_{||} v} \left(\frac{\omega' + \omega'_*}{\omega' - k'_{||} v} - \frac{\omega'' + \omega''_*}{\omega'' - k''_{||} v} \right)$$

$$Z^{(3)}(k_{||}, k'_{||}, k''_{||}, k'''_{||}) = \int \frac{dv f_o(v)}{(\omega - k_{||} v)(\omega' + \omega'' - (k'_{||} + k''_{||}) v)} \left(\frac{\omega'' + \omega''_*}{\omega'' - k''_{||} v} - \frac{\omega''' + \omega'''_*}{\omega''' - k'''_{||} v} \right) \quad (5.12)$$

En portant les expressions (5.10) des fluctuations de la densité dans l'équation de Poisson après avoir projeté celle-ci sur un mode propre nous avons l'équation :

$$\begin{aligned}
 (\langle k | \hat{k}^2 | k \rangle + k^2 \sum_{i,e} v_k^{(1)}) C_k &= k^2 \sum_{k',k''} C_{k'} C_{k''} V_{kk',k''} \delta(K-K'-K'') \delta_{\omega, \omega'+\omega''} \\
 &+ k^2 \sum_{k',k'',k'''} C_{k'} C_{k''} C_{k'''} V_{kk',k''k'''} \delta(K-K'-K''-K''') \delta_{\omega, \omega'+\omega''+\omega'''}
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

où nous ne retenons dans la partie non-linéaire figurant au second membre que la contribution due aux ions, celle des électrons est en effet négligeable comme on peut le constater d'après les expressions des coefficients V .

On reconnaît au premier membre la valeur moyenne de l'opérateur $k^2 \hat{D}(k, \omega)$ introduit dans la partie linéaire et l'équation (5.13) se ramène à la forme

$$\begin{aligned}
 \langle k | \hat{D}(k, \omega) | k \rangle C_k &= \sum_{k',k''} C_{k'} C_{k''} V_{kk',k''} \delta(K-K'-K'') \delta_{\omega, \omega'+\omega''} \\
 &+ \sum_{k',k'',k'''} C_{k'} C_{k''} C_{k'''} V_{kk',k''k'''} \delta(K-K'-K''-K''') \delta_{\omega, \omega'+\omega''+\omega'''}
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Nous sommes amenés ainsi à un problème analogue à celui étudié par Kadomtsev après avoir élucidé le sens et les expressions des coefficients d'interaction non-linéaire. L'équation (5.13) se prête maintenant à une analyse par des techniques développées dans la théorie de la turbulence faible développée par Kadomtsev. Celle-ci consiste à calculer C_k par perturbation sous la forme

$$C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)} + C_k^{(3)} + \dots$$

où $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ sont respectivement des contributions dues aux oscillations propres, à l'interaction par couplage de deux et trois ondes...

En posant

$$I_k = \langle |c_k|^2 \rangle$$

où la moyenne est prise sur les phases aléatoires, et en supposant que le spectre est piqué pour des fréquences voisines de la fréquence propre sous la forme

$$I_k = I_k \delta(\omega - \omega_k)$$

on obtient par les techniques usuelles l'équation

$$\begin{aligned} \langle k | \hat{D}(k, \omega) | k \rangle I_k = & \sum_{k', k''} V_{kk', k''} \left\{ \frac{V_{kk', k''}^* I_{k'} I_{k''}}{\langle k | \hat{D}^*(K, \omega_{k'} + \omega_{k''}) | k \rangle} \right. \\ & + \frac{V_{k'', k, -k'} I_{k'} I_{k''}}{\langle k | \hat{D}(K'', \omega_{k'} - \omega_{k''}) | k'' \rangle} + (k' \rightarrow k'') \left. \right\} \delta(K - K' - K'') \\ & + \sum_{k', k'', k'''} V_{k, k', k'', k'''} I_{k'} I_{k''} (K' + K'') \delta(K - K'') \end{aligned} \quad (5.16)$$

Notons qu'à cause du fait que les éléments V sont des éléments de matrice d'un opérateur dépendant des opérateurs $\hat{k}$, nous n'avons pas strictement, par exemple, pour $K'' = -K'$, $K''' = K$ l'égalité

$$V_{kk', k'' k'''} = V_{k, k', -k', k}$$

mais pour des commodités, nous poserons $\hat{k}$ pour désigner l'opérateur $(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, -K_y, -K_z)$.

Comme nous avons affaire à une turbulence faible, les effets non-linéaires ne donnent qu'un faible écart avec la structure linéaire, nous pouvons poser

$$\langle k | \hat{D}(K, \omega) | k \rangle = (\omega - \omega_k) \langle \frac{\partial \hat{D}}{\partial \omega_k} \rangle$$

et revenir dans l'espace t en effectuant une transformée de

Fourier, nous aboutissons à l'équation cinétique d'onde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_k}{\partial t} = & 2\gamma_k I_k + \langle \frac{\partial \hat{D}}{\partial \omega_k} \rangle^{-1} \text{Im} \sum_{k'k''} \left\{ \frac{|V_{k,k',k''}|^2 I_{k'} I_{k''}}{\langle k | \hat{D}(K, \omega_k, +\omega_{k''}) | k \rangle} \right. \\ & + \frac{V_{kk'k''} V_{k'',k,-k'} I_k I_{k'}}{\langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'},) | k'' \rangle} + (k' \rightarrow k'') \\ & \left. + V_{k,k',-k',k} I_k I_{k'} \right\} \delta(K - K' - K'') \end{aligned} \quad (5.17)$$

où le symbole k s'étend désormais uniquement sur l'ensemble (K, n) .

Structure des coefficients

On observe que les coefficients de l'équation (5.17) se présentent sous la forme d'une partie imaginaire d'un produit de fonctions, les termes imaginaires peuvent provenir de deux sources.

a) Contribution due aux pôles

Les contributions dues aux pôles des deux premiers termes quadratiques proviennent des zéros des fonctions $\langle \hat{D} \rangle$ figurant au dénominateur, cela peut se produire pour des ondes satisfaisant à la règle

$$\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$$

$$K = K' + K''$$

pour ces termes nous utilisons le développement de Taylor autour de la fréquence propre comme $\langle \hat{D}(K, \omega) \rangle = (\omega - \omega_k) \langle \frac{\partial \hat{D}}{\partial \omega_k} \rangle$ d'où on obtient par exemple pour le premier terme :

$$\text{Im} \frac{1}{\langle k | \hat{D}(K, \omega_k, +\omega_{k''}) | k \rangle} = \pi \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})$$

Pour le second terme, lorsque la résonance a lieu, nous avons la propriété (Cf. Appendice)

$$V_{k,k',k''} = \frac{\omega_k}{\omega_{k''}} V_{k'',k,-k'} = \text{réel}$$

le second terme contribue donc à la résonance encore par un terme proportionnel à $\delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''})$.

b) Contribution due aux éléments de matrice V

Ces contributions concernent les deux derniers termes quadratiques, nous voyons en effet que les éléments de matrice peuvent donner une contribution imaginaire importante lorsque les ondes k et k' satisfont à la relation

$$\omega_k - \omega_{k'} \approx (K_{||} - K'_{||})v_i$$

lorsque cette situation se réalise, les éléments de matrice $V_{kk'k''}$ et $V_{k''k-k'}$ sont proportionnels à $\langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'}) | k'' \rangle$ (Cf. Appendice) et le second terme contribue par un terme proportionnel à $\text{Im} \langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'}) | k'' \rangle$.

De même nous avons pour le troisième terme une proportionnalité entre $\text{Im} V_{k,k',-k',k}$ et $\text{Im} \langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'}) | k'' \rangle$ et le troisième terme contribue également à un terme proportionnel à $\text{Im} \langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'}) | k'' \rangle$.

2. EQUATION CINETIQUE POUR LES NOMBRES D'OCCUPATION

Définissons maintenant le nombre d'occupation par la formule

$$n_k | \omega_k | = \frac{k_D^2}{8\pi} \langle k | \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega \hat{D}(K, \omega)) | k \rangle I_k$$

et en séparant les contributions à la partie imaginaire de l'équation (5.17) par des remarques faites précédemment nous avons une équation qui se présente sous une forme symétrique de la forme :

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\gamma_k n_k + \sum_{k', k''} |v_{kk', k''}|^2 (n_k, n_{k''} - s_{k''} n_k n_{k'} - s_{k'} n_k n_{k''}) \times \delta(\omega_k - \omega_{k'} - \omega_{k''}) \delta(K - K' - K'') + \sum_{k', k''} M_{kk', k''} n_k n_{k'} \quad (5.18)$$

où les nouveaux éléments de matrice sont reliés aux anciens par les formules

$$|v_{kk', k''}|^2 = \frac{2\pi T}{e^2 n_0} \frac{|V_{kk', k''}|^2}{\langle \frac{\partial D}{\partial \omega_k} \rangle \langle \frac{\partial D}{\partial \omega_{k'}} \rangle \langle \frac{\partial D}{\partial \omega_{k''}} \rangle} \quad (5.12)$$

$$M_{kk', k''} = \frac{2T}{e^2 n_0} \frac{\text{Im}}{\langle \frac{\partial D}{\partial \omega_k} \rangle \langle \frac{\partial D}{\partial \omega_{k'}} \rangle} \left\{ \frac{V_{kk', k''} V_{k'' k - k'}}{\langle k'' | \hat{D}(K'', \omega_k - \omega_{k'}) | k'' \rangle} + V_{kk' - k', k} \right\}$$

$$s_k = \text{sign } \omega_k \langle \frac{\partial D}{\partial \omega_k} \rangle$$

Après avoir explicité les calculs, on trouve pour ces quantités les expressions :

$$|v_{kk', k''}|^2 = \frac{4\pi\Omega^2 a^4}{n_0 T} \left| \frac{\omega_{k'} \omega_{k''}}{\omega_k} \right| \left(\frac{\omega_{k''}^*}{\omega_{k''}} - \frac{\omega_{k'}^*}{\omega_{k'}} \right)^2 \frac{|\langle k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') | k', k'' \rangle|^2}{(2-\beta)(2-\beta')(2-\beta'')}$$

$$M_{kk', k''} = \frac{4\Omega^2 a^4}{n_0 T} (\omega_{k''}^* - \omega_{k'}^*) \text{Im} \langle k'' | \int \frac{f^0(v) dv}{\omega_k - \omega_{k'} - K_{||}'' v} | k'' \rangle \quad (5.20)$$

$$\left\{ \langle k | (\hat{k} \times (\hat{k}'' + K''))_{||} (\hat{k}'' \times \hat{k}')_{||} E(k', k'', k''') | k' k'' k''' \rangle \delta(K' + K'') \delta(K - K' - K'') - |\langle k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') | k', k'' \rangle|^2 \delta(K - K' - K'') \right\}$$

où nous avons posé :

$$\chi(k', k'') = \int dt e^{-t} J_0(\hat{k}_1 a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}_1'' a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}' + \hat{k}'')_1 a \sqrt{t} \quad (5.21)$$

$$E(k', k'', k''') = \int dt e^{-t} J_0(\hat{k}_1' a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}_1'' a \sqrt{t}) J_0(\hat{k}_1''' a \sqrt{t}) J_0((k' + k'' + k''')_1 a \sqrt{t})$$

Dans l'approximation B.K.W., l'opérateur $\hat{k}$ devient scalaire, à cause des règles de conservation sur les vecteurs d'onde les formules (5.20) se réduisent à :

$$|v_{kk'k''}|^2 = \frac{4\pi\Omega^2 a^4}{n_0 T} \left| \frac{\omega_{k'} \omega_{k''}}{\omega_k} \right| \left(\frac{\omega_{k''}^*}{\omega_{k''}} - \frac{\omega_{k'}^*}{\omega_{k'}} \right)^2 \frac{(k \times k')_{||}^2 \chi^2(k', k'') |<k|k', k''>|^2}{(2-\beta_s)(2-\beta'_s)(2-\beta''_s)}$$

$$M_{kk'k''} = \frac{4\Omega^2 a^4}{n_0 T} (\omega_{k''}^* - \omega_{k'}^*) \text{Im} \int \frac{dv f^0(v)}{\omega - K_{||} v} (k \times k')_{||}^2$$

$$\times \left\{ E(k', k'') - \frac{\chi(k', k'')}{\beta''_s} \right\} |<k|k', k''>|^2$$
(5.27)

Ces expressions ne diffèrent formellement des expressions obtenues pour les ondes planes que par le facteur de normalisation $|<k|k', k''>|^2$. Nous avons de plus dans cette approximation, pour les fonctions E et χ les comportements dans les zones de grande et courte longueurs d'onde suivants :

$$\left. \begin{aligned} E(k', k'') &\approx 1 \\ \chi(k', k'') &\approx 1 \end{aligned} \right\} \text{ pour } k'a, k''a < 1$$

$$\left. \begin{aligned} E(k', k'') &\approx \frac{\log(k'a)}{\pi^2 k_{\perp} k'_{\perp} a^2} \\ \chi(k', k'') &\approx \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} (k_{\perp} k'_{\perp} a^3)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \text{ pour } 1 \ll k'a < k''a$$
(5.23)

Lois de conservation

Considérons l'équation (5.18) dans le cas où le processus résonnant existe seul, à cause de la conservation des fréquences, on obtient la formule :

$$\sum_k \frac{d}{dt} (n_k |\omega_k|) = 0$$
(5.24)

qui montre la conservation de l'énergie totale des modes participant à une interaction résonnante. Remarquons que le nombre total des modes $\sum_k n_k$ n'est pas conservé.

Dans le cas où le processus de diffusion existe seul nous avons par contre à cause du caractère antisymétrique de $M_{kk'k''}$ dans l'échange k, k' , la conservation du nombre total des modes

$$\frac{d}{dt} \sum_k n_k = 0 \quad (5.25)$$

Cette loi générale a des corollaires importantes dans le cas des modes de dérive, nous avons en effet, pour ces modes, $\omega_k \approx \frac{v_d}{a}$ et la relation (5.25) donne

$$\frac{d}{dt} \sum_k n_k |\omega_k| = 0 \quad (5.26)$$

l'énergie est encore conservée dans une diffusion et l'effet Landau non-linéaire ne constitue pas à lui seul un processus de dissipation d'énergie pour les ondes de dérive.

Mode d'interaction

L'équation (5.18) décrit à la fois la génération du mode k à cause de l'instabilité, par le terme linéaire $\gamma_k n_k$ et la limitation de sa croissance due à l'interaction des modes par les termes quadratiques en n_k .

Nous avons séparé les termes non-linéaires en deux groupes suivant les modes d'interaction de l'onde.

- Le premier groupe décrit l'interaction entre trois ondes propres satisfaisant à la règle $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k''}$ ce qui justifie le terme d'interaction résonnante de ce processus dans lequel, une onde peut soit se désintégrer en deux autres ondes, soit entrer en fusion avec une autre onde pour en donner une troisième. Comme nous avons montré que l'énergie totale des

modos est conservée dans une interaction résonnante, celle-ci aura seulement comme conséquence une redistribution de l'énergie sur les modes.

- Le second groupe décrit l'interaction entre l'onde notée k avec l'onde notée k' . Puisque la différence $\omega'' = \omega_k - \omega_{k'}$, n'est pas égale à la fréquence propre $\omega_{k''}$, la fréquence ω'' et le vecteur d'onde k'' peuvent être considérés comme ceux d'une onde virtuelle résultant du battement entre les deux ondes propres. L'onde de battement peut entrer en résonance avec les particules de vitesse v du plasma telles que $\frac{\omega''}{k''} = v$ et l'interaction par l'intermédiaire des particules sera d'autant plus efficace que si la vitesse de phase de l'onde de battement est de l'ordre de la vitesse thermique des particules. De règle générale, pour les ondes de basse fréquence la diffusion est pratiquement assurée par les ions seuls.

3. ENERGIE TURBULENTE

Nous cherchons dans ce paragraphe à établir l'expression de l'énergie électrique en fonction des quantités I_k dont nous possédons l'équation d'évolution. Pour cela, nous partons de la formule classique

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi} \int d_3r \, dt \, E \frac{\partial D}{\partial t} \quad (5.27)$$

En faisant une décomposition de Fourier de E sur les espaces homogènes et une décomposition sur les modes propres du potentiel nous avons

$$E = \sum_k C_k \hat{k} \hat{\phi}_k(x) e^{i(Kx - \omega t)} \quad (5.28)$$

remarquons que l'opérateur $\hat{k}$ ayant pour composantes $(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, K_y, K_z)$ n'est pas diagonal dans la représentation choisie contrairement au cas des systèmes homogènes.

Le développement (5.28) définit les composantes de Fourier généralisées E_k de E comme :

$$E_k = \hat{k} \hat{\phi}_k \quad (5.29)$$

Comme on n'a pas de symétrie par translation dans l'espace x , le vecteur d'induction D_k doit être défini à partir de la formule générale suivante qui définit l'opérateur diélectrique $\hat{\epsilon}_k$

$$D_k = \hat{\epsilon}_k E_k = E_k - \frac{4\pi j}{\omega} \hat{\nu}_k \quad (5.30)$$

où $\hat{\epsilon}_k$ dépend de x .

En appliquant l'opérateur $\hat{k}$ sur les deux membres de (5.30) et en tenant compte de l'équation de continuité, nous pouvons mettre l'équation de Poisson sous la forme :

$$\{\hat{k}^2 + \hat{k}(\frac{1}{\hat{\nu}} - \hat{\epsilon}_k)\hat{k}\}\hat{\phi} = 0 \quad (5.31)$$

En comparant celle-ci avec l'équation (2.18) qui définit l'opérateur $\hat{D}$ nous avons entre celui-ci et l'opérateur diélectrique la relation

$$\hat{k} \hat{\epsilon}_k \hat{k} = k_D^2 \hat{D} \quad (5.32)$$

On peut décomposer E et D en série de Fourier et après intégration sur t, y, z , la formule de l'énergie peut se mettre sous la forme

$$W_{tot} = \frac{4}{8\pi} \sum_k \int dx |c_k|^2 \hat{k} \hat{\phi}^*(x) \frac{\partial}{\partial \omega_k} \omega \hat{\epsilon}(k, \epsilon) \hat{k} \hat{\phi}(x) \quad (5.33)$$

qui s'écrit encore à l'aide de (5.32) comme

$$W_{tot} = L^2 \frac{k_D^2}{8\pi} \sum_k \hat{\phi}_k \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega \hat{D}(k, \omega)) | \hat{\phi}_k > I_k \quad (5.34)$$

cette formule est l'équivalente de la formule donnée par Landau et Lifshitz⁽²⁰⁾ dans le cas homogène.

Il ressort de cette formule que la quantité W_k définie comme

$$W_k = \frac{k_D^2}{8\pi} \langle \tilde{\phi}_k | \frac{\partial}{\partial \omega_k} (\omega \hat{D}(k, \omega)) | \tilde{\phi}_k \rangle I_k \quad (5.35)$$

a la signification d'une densité d'énergie de surface et par mode.

La fonction n_k introduite précédemment est reliée à W_k par la formule

$$W_k = n_k |\omega_k| \quad (5.36)$$

qui montre que n_k possède la signification de la population des "quasi-particules" possédant chacune l'énergie $\hbar \omega_k$.

o o
o

C H A P I T R E VI

SPECTRE TURBULENT

Dans ce chapitre nous nous proposons d'étudier le spectre turbulent de l'état stationnaire final atteint par le système, à partir des équations de la turbulence faible. Les premières tentatives dans ce sens ont été faites dans les travaux de Kadomtsev, Galeev et Rudakov, Galeev et Sagdeev. Dans ces théories, le niveau d'énergie turbulente est obtenu d'une manière peu rigoureuse par comparaison des termes linéaire et non-linéaire de l'équation cinétique d'onde. De plus celles-ci semblent souffrir d'une grave incohérence, à savoir que le mécanisme de dissipation a été attribué au phénomène d'interaction résonnante à trois modes qui, en réalité, conserve l'énergie totale des modes participant à l'interaction. Afin de remédier à ce défaut, nous nous présentons un autre schéma d'interaction où l'absorption de l'énergie est assurée par les modes naturellement amortis qui eux dissipent l'énergie provenant des modes instables par l'intermédiaire soit du couplage résonnant à trois modes, soit de la diffusion induite par les ions.

1. SPECTRE STATIONNAIRE

L'évolution de l'amplitude des modes est gouvernée par l'équation (5.18) qui montre que dans la première phase, les modes linéairement instables commencent par croître avec le taux de croissance γ_k . L'effet non-linéaire qui constitue le mécanisme principal pour arrêter la croissance des modes intervient dès que les termes non-linéaires de (5.18) deviennent du même ordre que le terme linéaire et les modes atteignent un état de saturation dont le mécanisme est différent selon la longueur d'onde du

mode considéré et nous examinerons successivement les domaines des grandes et courtes longueurs d'onde.

1.1. Domaine $k_{\perp}^2 a^2 < 1$

Considérons les modes de grandes longueurs d'onde telles que $k_{\perp}^2 a^2 \ll 1$, où $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ et la valeur moyenne de k_x est quantifiée d'après la formule (3.18) comme $k_x^2 a^2 = (\tilde{n} + \frac{1}{2}) \frac{a_x}{r}$. Il est aisé de constater que dans ce domaine de longueur d'onde les deux termes constituant l'effet Landau non-linéaire de l'équation (5.18) se compensent presque totalement. Il en résulte que pour ces modes le couplage résonnant constitue le seul mécanisme non-linéaire permettant l'échange d'énergie entre les modes. Puisque le couplage résonnant conserve l'énergie totale des modes, le mécanisme de saturation peut être expliqué de la manière suivante :

Un mode de grande longueur d'onde croît à cause de son instabilité naturelle tout en subissant une désintégration en deux modes dont l'un au moins est de nature amortie et celui-ci constitue le mécanisme de dissipation de l'énergie des modes instables.

L'état stationnaire qui résulte de l'équilibre des deux processus de gain et de perte d'énergie vérifie l'équation

$$\gamma_{k,n}^{nn} + \int \sum_{n',n''} \frac{dk'}{(2\pi)^2} |v_{kk',k''}|^2 (n_{k',n'}^{n'} n_{k'',n''}^{n''} - s_{k''} n_{k,n}^{nn'} - s_{k'} n_{k,n}^{nn''}) \delta(\Delta\omega_k) = 0 \quad (6.1)$$

où nous avons précisé la valeur du nombre radial en indice supérieur.

La résolution de l'équation (6.1) sera facilitée par des remarques suivantes sur les coefficients des termes linéaire et quadratique :

- la fonction γ_K est maximum pour $K_z = 0$ pour lequel elle est proportionnelle à $(k_x a)^{-1}$. Pour des plus grandes valeurs de K_z la fonction γ_K diminue rapidement et change de signe pour $\frac{K_z}{K_y} > \frac{a}{r}$ conformément à la formule (2.21).

- L'élément de matrice d'interaction $|v_{KK'K''}|^2 \delta(\Delta\omega_K)$ est indépendant des composantes K_z des ondes participant à l'interaction et proportionnel à $k_x^3 a^3$.

Il en résulte que le couplage non-linéaire est particulièrement efficace pour les modes ayant une grande largeur d'extension et le niveau d'énergie de ceux-ci restera très inférieur à celui des modes de courte extension sur lesquels toute l'énergie se distribue. Grâce à ces remarques, la sommation sur les indices n de l'équation (6.1) peut être limitée aux premières valeurs entières et les couplages non nuls correspondent aux modes satisfaisant à la règle $n + n' + n'' = \text{impair}$ en raison de la parité des fonctions propres. Il en résulte que pour le couplage entre les nombres n les plus bas, le mode $n = 0$ se couple avec un mode $n = 0$ et un mode $n = 1$, de même le mode $n = 1$ se couple avec deux modes $n = 0$.

La condition de résonance qui de manière générale s'écrit

$$\Delta\omega_k \equiv \frac{3v_d}{2a} \{KK'K''a^3 + 2(nK - n'K' - n''K'')\frac{a}{3r}\} = 0 \quad (6.2)$$

se réduit pour le couplage le plus bas à :

$$\Delta\omega_k \equiv \frac{3v_d}{2a} (KK' - K_0^2) K'' a^3 = 0 \quad n = 0 \quad (6.3)$$

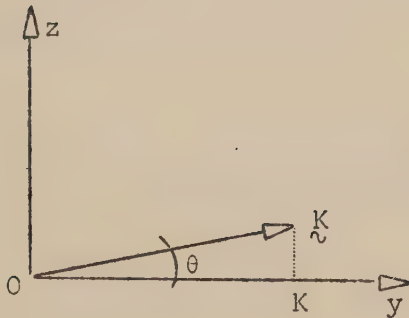
$$\Delta\omega_k \equiv \frac{3d}{2a} (K'K'' + K_0^2) K a^3 = 0 \quad n = 1 \quad (6.4)$$

où nous avons posé

$$K_0^2 a^2 = \frac{2a}{3r}, \quad K' + K'' = K \quad (6.5)$$

On voit ainsi que les composantes K_y des modes sont entièrement déterminées par la condition de résonance alors que les composantes K_z ne sont reliées que par la règle $K_z = K'_z + K''_z$.

Il serait alors commode de repérer les vecteurs d'onde par leur composante K_y et par l'angle θ qu'ils forment avec l'axe Oy :



Dans cette représentation, l'élément différentiel $d_2 k$ s'écrit :

$$d_2 k' = dK'K' d(\text{tg } \theta') \quad (6.6)$$

Nous pouvons intégrer l'équation (6.1) sur K' grâce à la fonction $\delta(\Delta\omega_k)$ et à la relation (6.3) et nous obtenons pour les modes $n = 0$ et $n = 1$ respectivement les équations :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{K}}^0 n_{\tilde{K}}^0 + \int d(\text{tg } \theta') \{ n_{\tilde{K}}^0, n_{\tilde{K}''}^1 - s_{K''} n_{\tilde{K}}^0 n_{\tilde{K}'}^0 - s_{K'} n_{\tilde{K}}^0 n_{\tilde{K}''}^1 \} &= 0 \\ \Gamma_K^1 n_K^1 + \int d(\text{tg } \theta') \{ n_K^0, n_K^0 - s_{K''} n_K^1 n_{\tilde{K}'}^0 - s_{K'} n_K^1 n_{\tilde{K}''}^0 \} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} \Gamma_K^0 &= \frac{3}{2} \frac{(2\pi)^2 v_d a^2}{|v_{K\tilde{K}'\tilde{K}''}|^2} \left| \frac{KK''}{K'} \right| \\ \Gamma_K^1 &= \frac{3}{2} \frac{(2\pi)^2 v_d a^2}{|v_{KK'\tilde{K}''}|^2} |K' - K''| \end{aligned} \quad (6.8)$$

et nous avons gardé dans ces équations les notations K' et K'' qui ne sont pas indépendantes mais reliées à K par la condition de résonance.

Puisque les modes n'ont une amplitude appréciable que si le vecteur d'onde $\tilde{K}$ se trouve dans un petit domaine défini par $\text{tg } \theta \lesssim \frac{a}{r}$ qui est petit par rapport au domaine de phase total, nous supposons que le spectre $n(K)$ a la forme

$$\begin{aligned} n_{\tilde{K}} &= n(K) & \text{tg } \theta &\leq \text{tg } \theta_{\text{max}} \\ n_{\tilde{K}} &= 0 & \text{tg } \theta &> \text{tg } \theta_{\text{max}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

où $\text{tg } \theta_{\text{max}} = \frac{a}{r}$ et $n(K)$ est une fonction ne dépendant que de K .

Avec cette hypothèse supplémentaire sur la fonction spectrale, nous ne pouvons pas atteindre l'expression de la fonction n_k mais seulement sa valeur moyenne sur les angles, nous définissons alors cette valeur moyenne comme

$$N(K) = \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} n_k \quad (6.10)$$

et les équations vérifiées par les fonctions $N^0(K)$ et $N^1(K)$ peuvent s'obtenir en intégrant les équations vérifiées par n_k^0 et n_k^1 sur les angles, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Gamma_K^0 N^0(K) + \iint d(\text{tg } \theta) d(\text{tg } \theta') \{n_k^0, n_k^1 - s_k n_k^0 n_k^0, -s_k, n_k^0 n_k^1\} &= 0 \\ \Gamma_K^1 N^1(K) + \iint d(\text{tg } \theta) d(\text{tg } \theta') \{n_k^0, n_k^0 - s_k n_k^1 n_k^0, -s_k, n_k^1 n_k^0\} &= 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

où nous devons prendre pour Γ_K^0 et Γ_K^1 leur valeur maximum correspondant à $K_z = 0$ pour ne pas commettre d'erreur sur les modes les plus instables.

Avec l'hypothèse supplémentaire sur la répartition angulaire des fonctions n_k on peut maintenant intégrer les termes quadratiques de (6.11) sur les angles avec toutefois quelques précautions à prendre à savoir :

. Le processus de fusion d'un mode amorti avec un autre mode pour restituer l'énergie sur le mode considéré doit être interdit conformément avec notre hypothèse formulée plus haut à savoir que les modes amortis ont une amplitude négligeable. En conséquence, l'intégration sur les angles portant sur les termes quadratiques relatifs à une entrée d'énergie doit être restreinte dans le domaine où tous les trois modes individuels sont de nature instable, ce domaine est donc défini par

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta &< \text{tg } \theta_{\max} \\ \text{tg } \theta' &< \text{tg } \theta_{\max} \\ \text{tg } \theta'' &< \text{tg } \theta_{\max} \end{aligned} \quad (6.12)$$

. Pour les processus de perte, les modes résultant de la désintégration peuvent être, au contraire, de nature quelconque, et les précautions précédentes pour l'intégration sur les angles ne sont pas à considérer.

Il en résulte qu'il y a une dissymétrie entre les processus de fusion et de désintégration dans l'équation portant sur la fonction $N(K)$ qui n'obéit pas, à l'encontre de la fonction n_k , à des lois de conservation sur l'énergie.

Pour achever l'intégration sur les angles des équations (6.11) considérons le mode $n = 0$ et $K = k$. D'après la condition de résonance ce mode se couple avec les modes ($K' = k'$, $n' = 0$) et ($K'' = k''$, $n'' = 1$) tels que

$$\begin{aligned} k' &= \frac{K_0^2}{k} \\ k'' &= k - \frac{K_0^2}{k} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Pour fixer les idées, nous choisissons $k > K_0$ et les quantités k' et k'' définies précédemment sont positives. Pour ce mode on a $s_{k'} > 0$, $s_{k''} > 0$ et l'équation relative à ce mode contient un terme d'entrée d'énergie et deux termes de perte. Celle-ci s'écrit après intégration sur les angles comme (Cf. Appendice)

$$\Gamma_k^1 N^0(k) + \left\{ \frac{k''}{k} N^0(k') N^1(k'') - N^0(k) N^0(k') - \frac{k''}{k} N^0(k) N^1(k'') \right\} = 0 \quad (6.14)$$

Pour le mode $K = k'$, $n = 0$, on a :

$$\begin{aligned} K' &= k & n' &= 0 & s_{K'} &> 0 \\ K'' &= -k'' & n'' &= 1 & s_{K''} &< 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

et l'équation relative à ce mode s'écrit :

$$\Gamma_{k'}^0 N^0(k') + \{-N^0(k') N^1(k'') + N^0(k) N^0(k') + N^0(k) N^1(k'')\} = 0 \quad (6.16)$$

Le mode ($K = k''$, $n = 1$) se couple avec les deux modes caractérisés par

$$\begin{aligned} K' &= k, \quad n' = 0, \quad s_{k'} > 0 \\ K'' &= -k', \quad n'' = 0, \quad s_{k''} < 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

et l'équation qui lui est associée s'écrit :

$$\Gamma_{k''}^0 N^1(k'') + \{-N^0(k') N^1(k'') + N^0(k) N^0(k') + N^0(k) N^1(k'')\} = 0 \quad (6.18)$$

En résolvant le système des équations (6.14), (6.16), (6.18) et en considérant successivement les limites $k \gg K_0$ et $|\frac{k-K_0}{K_0}| \ll 1$ on obtient le spectre complet des fonctions $N(K)$ qui s'écrivent

$$\begin{aligned} N^0(k) &= \frac{2k \Gamma_k}{k' (1 + \frac{\Gamma_{k'}}{\Gamma_{k''}})} & k > K_0 \\ N^0(k') &= \frac{2k \Gamma_k^1}{k' \Gamma_{k''}^1} & k < K_0 \\ N^1(k) &= \frac{2k \Gamma_k^0}{k' \Gamma_{k'}^0} & k > K_0 \\ N^1(k') &= \frac{1}{2} \frac{K_0}{k''} \Gamma_{K_0}^0 & k < K_0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

On constate d'après les formules (6.19) que le spectre $N^1(k)$ est toujours très petit devant $N^0(k)$ ce qui justifie notre calcul basé sur la considération des modes les plus localisés.

L'énergie totale qui est donnée par la formule

$$W_{\text{tot}} = \sum_n \int \frac{dK}{(2\pi)^2} K d(\text{tg } \theta) n(k) |\omega_k|$$

s'exprime donc à l'aide de la fonction $N(K)$ comme

$$W_{\text{tot}} = \sum_n \int \frac{dK}{(2\pi)^2} K N(K) |\omega_K|$$

où ω_K dans le domaine des grandes longueurs d'onde considérées ici est une fonction linéaire de K .

En définissant la fonction spectrale d'énergie $W(K)$ comme

$$W(k) = \frac{kN(k)}{(2\pi)^2} |\omega_K|$$

nous avons d'après (6.19)

$$\frac{W(k)}{rn_0 T} \approx \frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{\pi m}{M}} \frac{aL_s}{r^2} k \quad (6.20)$$

ce qui donne pour l'énergie totale l'expression

$$\frac{W_{tot}}{rn_0 T} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{aL_s}{r^2} \quad (6.21)$$

Puisque le cisaillement a été choisi tel que $\frac{L_s}{r} < \sqrt{\frac{M}{m}}$, l'énergie turbulente sera très inférieure à l'énergie cinétique disponible du système, ce qui plaide en faveur de la validité de la théorie de la turbulence faible sur laquelle nos calculs sont fondés.

1.2. Domaine $k^2 a^2 \gg 1$

Dans le domaine des courtes longueurs d'onde, la fréquence d'oscillation est quasiment indépendante du nombre d'onde, il s'en suit que le couplage résonnant à trois modes est interdit dans ce domaine où l'effet de diffusion induite par les ions assure seul l'échange d'énergie entre les modes. L'équation cinétique du nombre d'occupation n_k prend alors la forme :

$$\frac{dn_k}{dt} = 2\gamma_k n_k + \sum_{k', k''} M_{kk', k''} n_{k'} n_{k''} \quad (6.22)$$

ou rappelons que le noyau $M_{kk', k''}$ est antisymétrique dans l'échange $k \rightarrow k'$, ce qui a comme conséquence la conservation de l'énergie totale des modes participant à une diffusion.

De plus, nous avons $M_{kk'k''} > 0$ pour $K < K'$, l'équation (6.22) montre que le mode k considéré reçoit de l'énergie de la part des modes de plus courtes longueurs d'onde en même temps qu'il en cède aux modes de plus grandes longueurs d'onde. Au total, en vertu de la conservation de l'énergie totale des modes, il y a un transfert d'énergie vers la région des grandes longueurs d'onde et ce phénomène est souvent appelé déplacement vers le rouge. Notons que le transfert d'énergie s'effectue entre les modes ayant une composante K_z quelconque et les modes naturellement amortis peuvent participer à dissiper l'énergie des modes instables ayant une plus courte longueur d'onde.

L'état stationnaire peut alors être interprété comme un état d'équilibre entre les processus de gain d'énergie dû à l'instabilité et du transfert d'énergie en provenance des modes de courtes longueurs d'onde d'une part et les processus de perte dûs au transfert vers les modes de plus grandes longueurs d'onde d'autre part. Cet état vérifie l'équation :

$$\sum_{k', k''} M_{kk'k''} n_{k'} = 2\gamma_k \quad (6.23)$$

Par un raisonnement similaire au cas des modes à $k_{\perp a_i} < 1$ on peut se limiter aux modes correspondant aux premières valeurs du nombre radial, on peut écrire l'équation portant sur la densité $W(k)$ comme :

$$\frac{4\Omega^2 a^2}{\omega_K \pi^2 \Delta^3 n_o T} \left(\frac{v_d}{v_i} \right) \int \frac{dK}{(2\pi)^2} \frac{(K-K')(KK')^{3/2}}{|K_{\parallel}-K'_{\parallel}| (K+K')^{3/2}} W(K') = \gamma(K) \quad (6.24)$$

Nous supposons également que les modes amortis ont une amplitude négligeable, ceux-ci dans ce cas sont localisés dans le domaine $K_z < k_{zmax} \equiv r^{-1}$ et nous postulons que la fonction $W(K)$ a la forme simple suivante :

$$\begin{aligned} W(K) &= W(K) & K_z &\leq k_{zmax} \\ W(K) &= 0 & K_z &> k_{zmax} \end{aligned} \quad (6.25)$$

avec cette forme simplifiée de la fonction $w(K)$, seule la moyenne sur l'espace K_z est significative et nous définissons la fonction spectrale d'énergie $W(K)$ comme

$$W(K) = \int \frac{dk_z}{(2\pi)^2} w(K) \quad (6.26)$$

Celle-ci est reliée à la fonction $w(K)$ par la formule

$$W(K) = \frac{k_{z\max}}{(2\pi)^2} w(K) \quad (6.27)$$

et l'énergie totale s'exprime à l'aide de cette fonction par la formule

$$W_{\text{tot}} = \int dK W(K) \quad (6.28)$$

On obtient à partir de (6.24) et en tenant compte des relations (6.26) et (6.27) l'équation vérifiée par $W(K)$ qui s'écrit :

$$\int \frac{dk' (K'-K) K' (KK')^{1/2}}{(K+K')^{3/2}} \frac{W(K')}{\text{ar} n_o T} = \frac{\pi}{4\Delta_o^2} \sqrt{\frac{m}{M}} \quad (6.29)$$

avec les variables sans dimension

$$x = Ka, \quad x' = K'a, \quad \tilde{W}(x) = \frac{W(K)}{\text{ar} n_o T} ; \quad \epsilon = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{ma^3}{Mr^3}} \quad (6.30)$$

l'équation précédente peut encore s'écrire :

$$\int_1^\infty dx' \frac{(x'-x)x^{\frac{1}{2}}x'^{\frac{3}{2}}\tilde{W}(x')}{(x+x')^{3/2}} = \epsilon \quad (6.31)$$

Puisque cette équation décrit les modes de courte longueur d'onde c'est-à-dire pour $x \ll 1$, nous chercherons une solution sous la forme

$$\tilde{W}(x) = \frac{A}{x^s} \quad (6.32)$$

ce qui donne l'équation

$$\frac{A}{x} \frac{s-5}{2} \left[\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{3/2}} t^{\frac{3}{2}-s} - \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{3/2}} t^{\frac{5}{2}-s} \right] = \varepsilon \quad (6.33)$$

qui s'obtient en portant (6.32) dans (6.31) et en changeant $t = \frac{x}{1+x}$.

Les intégrales figurant dans (6.33) peuvent être ramenées à une forme plus familière en faisant le changement de variable

$$t = \frac{1-u}{u}$$

et l'équation (6.33) prend la forme

$$\frac{W}{x} \frac{s-5}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{s-2} \left[\frac{F(s-\frac{5}{2} | s-2 | s-1 | \frac{x}{1+x})}{s-2} - \frac{x}{1+x} \frac{F(s-\frac{3}{2} | s-1 | s | \frac{x}{1+x})}{s-1} \right] + \varepsilon = 0 \quad (6.34)$$

où nous avons utilisé la notation $F(a|b|c|z)$ pour la fonction hypergéométrique qui possède la représentation intégrale suivante

$$F(a|b|c|z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (6.35)$$

Les fonctions figurant dans (6.) sont du type $F(a|b|b+1|z)$, qui possède à l'origine et au point $z = 1$ les développements

$$\begin{aligned} F(a|b|b+1|z) &= 1 + \frac{ab}{b+1} z + \dots && \text{pour } z \approx 0 \\ F(a|b|b+1|z) &= \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1+b-a)} && \text{pour } a < 1 ; z \approx 1 \\ F(a|b|b+1|z) &= \frac{b}{a-1} \frac{1}{(1-z)^{a-1}} && \text{pour } a > 1 ; z \approx 1 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Puisque nous cherchons la solution valable pour $x \gg 1$, nous employerons donc les développements de Taylor des fonctions

F autour du point $z = 1$. Selon les valeurs de s , nous obtenons les équations :

a) $s < \frac{5}{2}$

$$\frac{A}{x^{s-\frac{5}{2}}} \frac{(\frac{9}{2} - 2s)\Gamma(s-2)\Gamma(\frac{5}{2} - s)}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \epsilon = 0 \quad (6.37)$$

b) $s = \frac{5}{2}$

Les intégrales (6.33) peuvent se calculer exactement, on obtient alors l'équation

$$- 2A \text{Log } x + \epsilon = 0 \quad (6.38)$$

c) $s > \frac{5}{2}$

La seconde intégrale de (6.33) l'emporte sur la première, ce qui donne pour ce cas l'équation

$$- \frac{A}{s - \frac{5}{2}} + \epsilon = 0 \quad (6.39)$$

Nous voyons donc que la solution la mieux adaptée doit correspondre au cas c), c'est-à-dire $s = \frac{5}{2} + \frac{A}{\epsilon}$.

Il reste à déterminer ce paramètre, pour cela, nous supposons que le spectre obtenu dans la région des grandes longueurs d'onde peut encore être extrapolé jusqu'à $k_a \approx 1$ c'est-à-dire $x = 1$. Dans le domaine $x = ka < 1$ ce spectre s'écrit avec les nouvelles notations :

$$W(x) = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{aL_s}{r^2} x \quad (6.40)$$

la continuité au point $x = 1$ donne :

$$A = \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{aL_s}{r^2} \quad (6.41)$$

$$s = \frac{5}{2} + \frac{L_s}{\pi r} \sqrt{\frac{r}{a}} \gg 1$$

On obtient pour la région $ka \gg 1$ le spectre :

$$\frac{W(k)}{rn_o T} = a \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{aL_s}{r^2} \frac{1}{(ka)^s} \quad (6.42)$$

et l'énergie turbulente associée :

$$\frac{W_{tot}}{rn_o T} = \frac{1}{s-1} \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{aL_s}{r^2} \quad (6.43)$$

ce qui est très inférieur à celle obtenue dans la zone $ka < 1$.

2. VERIFICATION DE LA FAIBLE TURBULENCE

Nous voyons donc que l'énergie turbulente est pratiquement concentrée sur les modes de grandes longueurs d'onde et ce sont ces derniers qui assurent la diffusion anormale sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe suivant.

Il reste maintenant à vérifier que la vitesse de dérivé des particules $\tilde{v} = C \frac{E \times B}{B^2}$ due à l'existence du champ électrique reste inférieure à leur vitesse de dérive initiale v_d . Comme celle-ci est dirigée suivant l'axe Oy, la composante sur cet axe de $\tilde{v}_E$ étant

$$\tilde{v}_B = \frac{C}{B} E_x \quad (6.44)$$

la valeur quadratique moyenne de cette quantité serait, en adoptant la représentation BKW pour les modes

$$|\tilde{v}_y|^2 = \frac{C^2}{B^2} \int \frac{d_3 r}{V} |E_x|^2 = \frac{C^2}{B^2 r} \sum_K k_x^2 I_K \quad (6.45)$$

En passant en représentation continue, on peut réécrire cette quantité sous la forme

$$\tilde{v}_y^2 = \frac{C^2}{B^2 r} \frac{T}{4\pi e^2 n_o} \int dk k_x^2 W(k) \quad (6.46)$$

et puisque pour les modes considérés (faible extension) on a $k_x^2 a^2 \approx \frac{a}{r}$, on obtient d'après la formule de l'énergie turbulente (6.21) l'expression

$$v_y^2 \approx v_d^2 \left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{a L_s}{r^2} \quad (6.47)$$

avec le choix du cisaillement $\frac{L_s}{r} \ll \sqrt{\frac{M}{m}}$, la théorie de la turbulence faible est donc justifiée.

3. COEFFICIENT DE DIFFUSION

Selon Bohm, les instabilités conduisent le système à une éjection turbulente du plasma avec une vitesse de l'ordre de la vitesse de dérive et le processus de diffusion peut être considéré phénoménologiquement avec le coefficient de diffusion, appelé coefficient de Bohm, donné par $D_B = \frac{1}{16} \frac{CT}{qB}$. L'argument de Bohm semble vouloir montrer le caractère universel de ce coefficient mais nous voyons que celui-ci ne peut pas s'obtenir sans faire une étude précise sur l'instabilité. Dans le cas des instabilités de dérive, Galeev et Sagdeev ont estimé cette quantité par une analyse dimensionnelle et leur calcul montre que celle-ci est donnée par la formule

$$D = \frac{\gamma_k^2}{(\omega_* - \omega_k)} \lambda_x^2 \quad (6.48)$$

où λ_x est longueur d'onde suivant l'axe x. Ces auteurs ont ensuite postulé que λ_x doit être pris de l'ordre du rayon de Larmor des ions pour lequel le coefficient de diffusion vaut

$$D \approx \left(\frac{m}{M\beta} \frac{a}{r}\right) \frac{CT}{eB} \quad (6.49)$$

On voit que le choix de la longueur d'onde λ_x est quelque peu arbitraire et nous nous proposons de calculer d'une manière plus précise le coefficient de diffusion grâce à la connaissance

connaissance du spectre turbulent trouvé dans la section précédente.

Pour cela, considérons la réaction des fluctuations sur la fonction de distribution décrite par l'équation

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{q}{mC} (\chi \times B) \frac{\partial}{\partial v} \right\} f^0 = \frac{q}{m} \nabla \phi \frac{\partial}{\partial v} \delta f \quad (6.50)$$

Par décomposition du second membre sur les modes propres suivie d'une moyenne sur les oscillations rapides on obtient

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{q}{mC} (\chi \times B) \frac{\partial}{\partial \chi} \right\} f^0 = \frac{q}{m} \sum_k C_k^* \left(e^{\frac{d}{\chi dx} \chi_k^*(x)} - i \phi_k^*(x) \chi_k \right) \frac{\partial}{\partial \chi} \delta f_k \quad (6.51)$$

avec l'aide de la formule (2.13), on obtient l'équation suivante résultante de la moyenne sur les angles azimutaux du vecteur vitesse

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} = \frac{q^2}{m^2} \sum_k \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{I_k \chi^2(x) J_0^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right)}{i(\omega - K_{\parallel} v_{\parallel})} \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) f^0(v_{\perp}, v) \quad (6.52)$$

celle-ci donne séparément pour les ions et les électrons les équations respectives suivantes :

$$\frac{\partial f_i^0}{\partial t} = \frac{e^2}{M^2} \sum_k \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\gamma_k I_k}{\omega_k} \chi^2(x) J_0^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_i^0 \quad (6.53)$$

$$\frac{\partial f_e^0}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \sum_k \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) I_k \chi^2(x) \delta(\omega - K_{\parallel} v) \left(k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{k_y}{\Omega_e} \frac{\partial}{\partial x} \right) f_e^0 \quad (6.54)$$

ce qui donne pour l'équation portant sur la densité la même équation pour les deux espèces de particule et celle-ci s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{eC}{TB} \sum_k k_y \frac{\partial}{\partial x} \left\{ I_k \frac{\gamma_k}{\omega_k} (2 - I_0 e^{-b}) \chi_k^2(x) \left(\frac{n}{\frac{dn}{dx}} \right) \right\} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (6.55)$$

On en tire le coefficient de diffusion :

$$D = \frac{eC}{TB} \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1} \sum_k \frac{\gamma_k}{\omega_k} I_k |\phi_k(x)|^2 \quad (6.56)$$

En limitant la sommation sur les premiers nombres radiaux et en y portant l'expression trouvée dans la section précédente du spectre d'énergie nous obtenons finalement pour le coefficient de diffusion l'expression

$$D \approx \frac{1}{5} \left(\frac{eT}{eB} \right) \frac{m}{M} \sqrt{\frac{r}{a}} \frac{L_s}{r} \text{Log} \frac{aL_s}{r\Delta} \quad (6.57)$$

Nous avons également un coefficient de diffusion inférieur à celui de Bohm avec le choix du cisaillement minimum requis pour avoir une faible instabilité.

o o
o

C O N C L U S I O N

Le type d'instabilité que nous avons décrit dans ce travail présente un caractère fondamental en raison des conséquences qu'elle peut avoir sur le confinement. La théorie montre qu'on peut stabiliser les instabilités de dérive par un cisaillement suffisant des lignes de force, nous avons montré à ce propos que l'analyse locale habituellement adoptée est insuffisante dans ce cas et nous avons développé une analyse adéquate permettant d'inclure la variation du champ magnétique.

Sur le plan d'étude non-linéaire, nous pensons avoir réalisé quelques progrès pour l'investigation du spectre turbulent ainsi que du coefficient de diffusion anormale. Jusqu'à présent les données expérimentales relatives aux plasmas stabilisés par un cisaillement ne sont pas nombreuses pour pouvoir faire une comparaison avec notre théorie, mais l'expérience de Stott et les collaborateurs⁽²¹⁾, sur le lithium semble confirmer une variation linéaire du coefficient de diffusion en fonction du cisaillement comme nous l'avons montré par la formule (6.57).

D'autre part, nous avons développé une théorie quelque peu restrictive du fait du modèle choisi pour le plasma, cependant nous espérons que les résultats obtenus serviront de guide pour une théorie plus générale tenant compte d'une géométrie plus réaliste et des phénomènes négligés.

APPENDICE AINTEGRATION SUR LES TRAJECTOIRES1. THEORIE QUASILOCALE

Les fluctuations calculées dans la théorie quasilocale (chapitre 2) font intervenir l'intégrale

$$I = \oint dt e^{-i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(t'))} \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde et $\mathbf{r}(t)$ l'orbite des particules définie par les équations

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'} &= \mathbf{v}(t') ; \quad \mathbf{r}(t'=t) = \mathbf{r} ; \quad \mathbf{v}(t'-t) = \mathbf{v} \\ \left\{ \begin{aligned} v_x(t') &= v_{\perp} \cos \{ \Omega(t'-t) + \theta \} \\ v_y(t') &= v_{\perp} \sin \{ \Omega(t'-t) + \theta \} \\ v_z(t') &= v_z \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

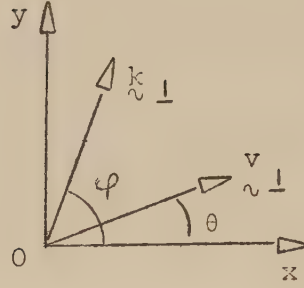
où θ est l'angle formé par le vecteur $\mathbf{v}_{\perp}$ avec l'axe Ox . On obtient à partir de (A.2) les coordonnées des particules :

$$\left\{ \begin{aligned} x(t') &= x + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \{ \sin(\Omega(t'-t) + \theta) - \sin \theta \} \\ y(t') &= y + \frac{v_{\perp}}{\Omega} \{ \cos(\Omega(t'-t) + \theta) - \cos \theta \} \\ z(t') &= z + v_z(t'-t) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.3})$$

Désignons par φ l'angle formé par le vecteur $\mathbf{k}_{\perp}$ avec l'axe Ox (Cf. figure ci-après) et nous posons :

$$\psi = \varphi - \theta$$

$$\zeta = t' - t$$



avec ces conventions nous obtenons les relations utiles suivantes:

$$k_{\perp}(t') = k_{\perp}(t) - \frac{\{k \times v(t)\}_z}{\Omega} + \frac{\{k \times v(t')\}_z}{\Omega} + k_z v_z \zeta$$

$$k_{\perp}(t') - \omega t' = k_{\perp}(t) - \omega t - \frac{\{k \times v\}_z}{\Omega} + \frac{\{k \times v(t')\}_z}{\Omega} + (k_z v_z - \omega) \zeta \quad (A.4)$$

$$\frac{\{k \times v(t)\}_z}{\Omega} = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin \psi$$

$$\frac{\{k \times v(t')\}_z}{\Omega} = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega \zeta - \psi)$$

Dans les formules (A.4) nous avons séparé au second membre les parties ne dépendant que des constantes de mouvement et les parties dépendant de la variable d'intégration ζ . Avec ces calculs préliminaires on peut mettre l'intégrale I sous la forme :

$$I = e^{-i(\omega t - k_{\perp} r + \frac{\{k \times v\}_z}{\Omega} z)} \int_{-\infty}^0 d\zeta e^{-i\{\omega \zeta - k_z v_z \zeta - \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega \zeta - \psi)\}} \quad (A.5)$$

On utilise ensuite pour l'intégrand le développement :

$$e^{iz \sin \alpha} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} J_{\ell}(z) e^{i\ell \alpha} \quad (A.6)$$

et on obtient après intégration sur ζ :

$$I = e^{-i(\omega t - k_{\perp} r + \frac{\{k \times v\}_z}{\Omega} z)} \sum_{\ell} \frac{J_{\ell}(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}) e^{-i\ell \psi}}{-i(\omega - k_z v_z - \ell \Omega)} \quad (A.7)$$

En portant l'expression (7) dans la formule (2.12) de la fluctuation δf nous obtenons la formule :

$$\delta f = - \frac{q}{T} f^0 \tilde{\phi} \left\{ 1 - e^{-i \frac{\{k \times v\}_z}{\Omega}} \sum_{\ell} \frac{J_{\ell}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) e^{-i \ell \psi}}{\omega - k_z v_z - \ell \Omega} \right\} e^{-i(\omega t - k_{\perp} r)} \quad (A.8)$$

le terme $e^{-i \frac{\{k \times v\}_z}{\Omega}}$ qui contient des conditions initiales peut encore être développé suivant la formule (A.6), on obtient après avoir moyenné sur l'angle ψ la nouvelle expression

$$\delta f = - \frac{q}{T} f^0 \tilde{\phi} \left\{ 1 - \sum_{\ell} \frac{J_{\ell}^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right)}{\omega - k_z v_z - \ell \Omega} \right\} e^{-i(\omega t - k_{\perp} r)} \quad (A.9)$$

Dans la limite des basses fréquences $\omega \ll \Omega$ seul le terme $\ell = 0$ est retenu et on trouve les formules annoncées dans le texte (formule 2.13).

2. THEORIE EXACTE

Dans la théorie exacte, on devrait calculer l'intégrale

$$J = \oint dt' \tilde{\phi}(x') e^{-i(\omega t - k_{\perp} r)} \quad (A.10)$$

où $x' = x(t')$

et les orbites sont encore définies par les équations (A.2) et $K_{\perp}$ n'a que les composantes K_y et K_z , c'est la situation de la figure 1 avec $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

On exprime $\tilde{\phi}(x')$ dans l'intégrand en série de Taylor

$$\tilde{\phi}(x') = \tilde{\phi}(x) + (x' - x) \frac{d\tilde{\phi}}{dx}(x) + \frac{1}{2}(x' - x)^2 \frac{d^2\tilde{\phi}}{dx^2}(x) + \dots \quad (A.11)$$

ce qui donne pour J :

$$J = I_1 \tilde{\phi}(x) + I_2 \frac{d\tilde{\phi}}{dx}(x) + \frac{1}{2} I_3 \frac{d^2\tilde{\phi}}{dx^2}(x) + \dots \quad (A.12)$$

où I_1 est l'intégrale (1) et

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \oint dt' (x'-x) e^{-i(\omega t' - Kx(t'))} \\ I_3 &= \oint dt' (x'-x)^2 e^{-i(\omega t' - Kx(t'))} \end{aligned} \right\} \quad (A.13)$$

On remplace dans (A.13) la différence $x'-x$ par l'expression tirée de (3), ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= \frac{v_1}{\Omega} e^{-i(\omega t - Kx + \frac{\{K \times v\}_z}{\Omega} z)} \int_{-\infty}^0 d\zeta \{ \cos(\Omega \zeta - \psi) - \cos \psi \} \\ &\quad e^{-i\{\omega \zeta - k_z v_z \zeta - \frac{K_1 v_1}{\Omega} \sin(\Omega \zeta - \psi)\}} \\ I_3 &= \frac{v_1^2}{\Omega^2} e^{-i(\omega t - Kx + \frac{\{K \times v\}_z}{\Omega} z)} \int_{-\infty}^0 d\zeta \{ \cos(\Omega \zeta - \psi) - \cos \psi \}^2 \\ &\quad e^{-i\{\omega \zeta - k_z v_z \zeta - \frac{K_1 v_1}{\Omega} \sin(\Omega \zeta - \psi)\}} \end{aligned} \right\} \quad (A.14)$$

On utilise ensuite pour (A.14) la formule $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ pour les termes cosinus puis on procède comme pour I_1 en utilisant le développement (A.6), on obtient le résultat suivant :

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= -\frac{v_1}{\Omega} e^{-i(\omega t - Kx + \frac{\{K \times v\}_z}{\Omega} z)} \sum_{\ell} \frac{J_{\ell-1} + J_{\ell+1} - J_{\ell} \cos \psi}{-i(\omega - K_z v_z - \ell \Omega)} e^{-i\ell \psi} \\ I_3 &= \frac{2v_1^2}{\Omega^2} e^{-i(\omega t - Kx + \frac{\{K \times v\}_z}{\Omega} z)} \sum_{\ell} \frac{J_{\ell+2} + 2J_{\ell} + J_{\ell-2} - (J_{\ell+1} + J_{\ell-1}) \cos \psi + J_{\ell} \cos^2 \psi}{-i(\omega - K_z v_z - \ell \Omega)} e^{-i\ell \psi} \end{aligned} \right\} \quad (A.15)$$

après avoir développé le facteur $e^{-i\frac{\{K \times v\}_z}{\Omega} z}$ suivant la formule (A.6) et effectuée la moyenne sur les angles, l'on obtient

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= 0 \\ I_3 &= \frac{v_1^2}{\Omega^2} e^{-i(\omega t - Kx)} \sum_{\ell} \frac{J_{\ell}^2 + \frac{1}{2}(J_{\ell+2} + J_{\ell-2})J_{\ell} - \frac{1}{2}(J_{\ell+1}J_{\ell-1})^2}{-i(\omega - K_z v_z - \ell \Omega)} \end{aligned} \right\} \quad (A.16)$$

On porte les expressions (A.16) dans (A.12) et en considérant la limite des basses fréquences on obtient finalement :

$$J = \frac{J_o^2 \tilde{\phi}(x) + \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}^2}{\Omega^2} (J_o^2 + J_o J_2) \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\phi}(x)}{-i(\omega - K_z v_z)} e^{-i(\omega t - K_r r)} \quad (A.17)$$

C'est le résultat annoncé du texte.

3. DEDUCTION FORMELLE DES RESULTATS EXACTS A PARTIR DES EXPRESSIONS B.K.W.

Soit $\vec{K}$ le vecteur n'ayant que les composantes K_y et K_z telles que $K_y = k_y$ et $K_z = k_z$; dans l'approximation B.K.W. l'intégrale J définie par (A.10) serait donnée d'après (A.7) par :

$$J_{BKW} = \frac{J_o^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right) \tilde{\phi}(x) e^{-i(\omega t - K_r r)}}{-i(\omega - K_z v_z)} \quad (A.18)$$

Si nous considérons dans (A.18) le symbole $\hat{k}$ comme l'opérateur tel que $k_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, nous avons $k_{\perp}^2 = k_x^2 + K_{\perp}^2 = K_{\perp}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

En développant l'opérateur $J_o^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega} \right)$ en série de Taylor autour de $\frac{K_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}$ arrêtée au deuxième terme on obtient exactement la formule (A.17) ce qui permet d'obtenir les résultats exacts à partir des expressions quasilocales à condition d'y remplacer k_x par l'opérateur $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.

APPENDICE B

1. CALCUL ITERATIF DES FLUCTUATIONS

On calcule les différents ordres des perturbations de la fonction de distribution par la formule d'itération

$$\delta f^{(n+1)} = \frac{q}{m} \oint dt \nabla \Phi \frac{\partial}{\partial v} \delta f^{(n)} \quad (B.1)$$

Le perturbation au premier ordre a été calculée dans l'appendice A en faisant une décomposition de $\delta f^{(1)}$ sur les modes propres. On peut ainsi écrire pour cette quantité dans l'espace r , comme

$$\delta f^{(1)}(r, v, t) = \frac{q}{T} \sum_k C_k \hat{\mu}_k \phi_k(r, t) \quad (B.2)$$

où rappelons
$$\phi_k(r, t) = \tilde{\phi}_k(x) e^{i(Kr - \omega t)} \quad (B.3)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{\omega + \omega_*}{\omega - k_{||} v} J_0\left(\frac{k_{\perp} v}{\Omega}\right) e^{-i\left(\frac{\hat{k} \times v}{\Omega}\right)} f^0(v) \quad (B.4)$$

et l'opérateur $\hat{\mu}_k$ dépend de $\hat{k}$, opérateur de composantes $(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, k_y, k_z)$ agissant uniquement sur la fonction ϕ_k portant le même indice k .

En faisant la décomposition de Φ sur les modes propres, on peut écrire pour la fluctuation au second ordre sous la forme :

$$\delta f^{(2)} = \frac{iq^2}{mT} \sum_{k'} \sum_{k''} \oint dt C_{k'} C_{k''} \hat{k}' \frac{\partial}{\partial v} \hat{\mu}_{k''} \phi_{k'} \phi_{k''} \quad (B.5)$$

la dérivation de $\hat{\mu}_{k''}$ par rapport à v comporte plusieurs termes, seule la contribution résultant de la dérivation sur le facteur exponentiel de $\hat{\mu}_{k''}$ est significative, on obtient ainsi :

$$\delta f^{(2)} = - \frac{iqC}{TB} \sum_{k'} \sum_{k''} \oint dt C_{k'} C_{k''} \frac{(\omega'' + \omega_*)}{\omega'' - k''_{||} v} f^0 J_0\left(\frac{\hat{k}'' v_{\perp}}{\Omega}\right) e^{-i \frac{(\hat{k}'' \times v)_{||}}{\Omega}} (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \phi_{k'} \phi_{k''} \quad (B.6)$$

l'intégration sur les orbites non-perturbées peut maintenant s'effectuer sans difficulté par la méthode exposée dans l'appendice A et on obtient $f^{(2)}$ sous la forme :

$$\delta f^{(2)} = \frac{q}{T} \sum_{k'} \sum_{k''} C_{k'} C_{k''} \hat{\mu}_{k',k''} \phi_{k'} \phi_{k''} \quad (B.7)$$

où l'opérateur $\hat{\mu}_{k',k''}$ a pour expression

$$\hat{\mu}_{k',k''} = - \frac{iC}{B} \frac{(\omega'' + \omega''_*) f^0(v) J_0\left(\frac{\hat{k}'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) e^{-i \left[\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'') \times v}{\Omega} \right]_{\parallel}} (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{\parallel}}{(\omega'' - k''_{\parallel} v) (\omega' + \omega'' - (k' + k'')_{\parallel} v)} \quad (B.8)$$

On peut ensuite effectuer le développement du terme exponentiel suivant les fonctions de Bessel, ce qui donne après avoir moyenné sur les angles azimutaux du vecteur vitesse l'expression finale de $\hat{\mu}_{k',k''}$ sous forme symétrisée suivante

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{k',k''} = \frac{iC}{B} (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{\parallel} & \frac{J_0\left(\frac{\hat{k}'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'')_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f(v)}{\omega' + \omega'' - (k' + k'')_{\parallel} v} \\ & \times \left(\frac{\omega'' + \omega''_*}{\omega'' - k''_{\parallel} v} - \frac{\omega' + \omega'_*}{\omega' - k'_{\parallel} v} \right) \end{aligned} \quad (B.9)$$

Pour calculer la perturbation au troisième ordre, on devra partir de l'expression de $\delta f^{(2)}$ avec l'expression de $\hat{\mu}^{(2)}$ donnée par la formule (B.8), ce qui donne par le même procédé, pour $\delta f^{(3)}$ une expression qui peut se mettre sous la forme

$$\delta f^{(3)} = \frac{q}{T} \sum_{k'} \sum_{k''} \sum_{k'''} C_{k'} C_{k''} C_{k'''} \hat{\mu}_{k',k'',k'''} \phi_{k'} \phi_{k''} \phi_{k'''} \quad (B.10)$$

où l'opérateur $\hat{\mu}_{k',k'',k'''}$ a pour expression

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{k',k'',k'''} = - \frac{C^2}{B^2} & (\hat{k}''' \times \hat{k}'')_{\parallel} (\hat{k}' \times (\hat{k}'' + \hat{k}'''))_{\parallel} \times \\ & \frac{J_0\left(\frac{\hat{k}'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}'''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'' + \hat{k}''')_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f^0(v)}{\{\omega' + \omega'' + \omega''' - (k' + k'' + k''')_{\parallel} v\} \{\omega'' + \omega''' - (k'' + k''')_{\parallel} v\}} \\ & \times \left(\frac{\omega'' + \omega''_*}{\omega'' - k''_{\parallel} v} - \frac{\omega''' + \omega'''_*}{\omega''' - k'''_{\parallel} v} \right) \end{aligned}$$

2. CALCUL DES COEFFICIENTS D'INTERACTION NON-LINEAIRE

2.1. Le coefficient d'interaction à deux ondes d'après sa définition (formules 5.11 et 5.12) est l'élément de matrice de l'opérateur $\hat{\mu}_{k',k''}$ pris entre les états représentés par ϕ_k et $\phi_{k'}, \phi_{k''}$ et intégré sur la vitesse. Puisque $\phi_k = \tilde{\phi}_k(x) e^{i(Kk - \omega t)}$, on a après intégration $\omega = \omega' + \omega''$ et $K = K' + K''$, ce qui permet d'écrire le coefficient $V_{kk',k''}^{(2)}$ comme :

$$V_{kk',k''}^{(2)} = - \frac{iC(k' \times k'')_{\parallel}}{B} \langle \tilde{\phi}_k(x) | \int d_3 v \frac{J_0\left(\frac{\hat{k}'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'')_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right)}{\omega - k_{\parallel} v} \left(\frac{\omega'' + \omega''_{*}}{\omega'' + k''_{\parallel} v} - \frac{\omega' + \omega'_{*}}{\omega' - k'_{\parallel} v} \right) | \tilde{\phi}_{k'}(x) \tilde{\phi}_{k''}(x) \rangle \quad (B.12)$$

où le symbole $\langle \rangle$ porte uniquement sur l'espace x . Pour l'intégration sur $v_{\perp}$ il est commode d'introduire la notation

$$\chi(k', k'') = \int d_3 v_{\perp} J_0\left(\frac{\hat{k}'_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'')_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f^0(v_{\perp}) \quad (B.13)$$

avec cette notation on peut écrire (B.12) sous la nouvelle forme

$$V_{kk',k''}^{(2)} = - \frac{iC}{B} \langle \tilde{\phi}_k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{\parallel} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') \int dv \left(\frac{\omega'' + \omega''_{*}}{\omega'' - k''_{\parallel} v} - \frac{\omega' + \omega'_{*}}{\omega - k_{\parallel} v} \frac{f^0(v)}{-k_{\parallel} v} \right) | \tilde{\phi}_{k'} \tilde{\phi}_{k''} \rangle \quad (B.14)$$

ce qui est le résultat annoncé dans le texte (formule 5.13) pour le cas général. Cette expression se simplifie quelque peu selon que cet élément se réfère à une interaction résonnante ou à une diffusion.

Cas d'une interaction résonnante

Les trois ondes k, k', k'' sont des ondes propres pour lesquelles on a $\omega = \omega_k$; $\omega' = \omega_{k'}$; $\omega'' = \omega_{k''}$. En négligeant la dépendance de la vitesse dans le dénominateur pour les ondes propres, on obtient pour la résonance

$$V_{kk'k''}^{(2)} = - \frac{iC}{B} \left(\frac{\omega''}{\omega_{k''}} - \frac{\omega'}{\omega_{k'}} \right) \langle \tilde{\phi}_k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''} \rangle \quad (B.15)$$

Cas d'une diffusion

Soient par exemple, ω et ω' , les ondes propres, on a dans ce cas $\omega = \omega_k$; $\omega' = \omega_{k'}$; $\omega'' = \omega_k - \omega_{k'}$, $\neq \omega_{k''}$. En négligeant encore la dépendance de la vitesse dans le dénominateur pour les ondes propres on a pour la diffusion

$$V_{kk'k''}^{(2)} = - \frac{iC}{B} \left(\frac{\omega'' + \omega''}{\omega_k} \right) \langle \tilde{\phi}_k | \hat{k}' \times \hat{k}''_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''} \rangle \int \frac{dv}{\omega'' - k''_{||} v} f^0(v) \quad (B.16)$$

ce qu'on peut encore écrire comme

$$V_{kk'k''}^{(2)} = - \frac{iC}{B} \left(\frac{\omega'' + \omega''}{\omega_k} \right) \langle \tilde{\phi}_k | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(\hat{k}', \hat{k}'') | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''} \rangle \langle \tilde{\phi}_{k''} | \int \frac{dv}{\omega'' - k''_{||} v} f^0(v) | \tilde{\phi}_{k''} \rangle \quad (B.17)$$

En se référant à la définition de $\hat{D}(k, \omega)$ (formule 2.18) nous constatons que le terme figurant sous le signe d'intégration est proportionnel à $\langle \hat{D}(k'', \omega - \omega') \rangle$, ce qui permet de récrire (16) comme :

$$V_{kk'k''}^{(2)} = - \frac{iC}{B \omega_k \beta_s} \langle \tilde{\phi}_k(x) | (\hat{k}' \times \hat{k}'')_{||} \chi(k', k'') \hat{D}(k'', \omega - \omega') | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''} \rangle \quad (B.18)$$

où $\beta_s = I_0(b'') e^{-b''}$.

Dans la limite considérée ($\omega'' < k'' v_i$), la partie imaginaire de $\hat{D}$ est prépondérante, ce qui montre que $V_{kk'k''}^{(2)}$ est imaginaire pur et proportionnel à l'élément de matrice de $\hat{D}(k'', \omega - \omega')$ comme nous l'avons annoncé dans le texte.

2.2. Coefficient d'interaction à trois ondes

On a besoin simplement du coefficient $V_{k, k', -k', -k}^{(3)}$ qui est l'élément de matrice de $\hat{\mu}_{k'k''k'''}^{(3)}$ pris entre les états ϕ_k et $\phi_{k'}, \phi_{k''}, \phi_{k'''}$ avec $k'' = -k'$; $k''' = -k$.

En posant :

$$\Xi(k', k'', k''') = \int dv_{\perp} J_0\left(\frac{\hat{k}_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{\hat{k}'''_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) J_0\left(\frac{(\hat{k}' + \hat{k}'' + \hat{k}''')_{\perp} v_{\perp}}{\Omega}\right) f^0(v_{\perp})$$

(B.19)

on obtient $V^{(3)}$ sous la forme :

$$V^{(3)} = - \frac{c^2}{B^2} (\hat{k}''' \times \hat{k}'')_{\parallel} (\hat{k}' \times (\hat{k}'' + \hat{k}'''))_{\parallel} \\ \times \langle \tilde{\phi}_k | \Xi(k', k'', k''') \int dv \left(\frac{\omega' + \omega_{*}}{\omega' - k'_{\parallel} v} - \frac{\omega + \omega_{*}}{\omega - k_{\parallel} v} \right) \frac{f^0(v)}{(\omega - k_{\parallel} v)(\omega - \omega' - (k - k')_{\parallel} 0)} \\ \times | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''}, \tilde{\phi}_{k'''} \rangle$$

(B.20)

où nous avons conservé les notations k'' et k''' pour préciser leurs actions sur les fonctions correspondantes et le remplacement $k'' = -k'$, $k''' = k$ ne doit être fait qu'à la fin.

En négligeant les termes $k_{\parallel} v$ devant ω pour les ondes propres on aboutit à

$$V^{(3)} = - \frac{c^2}{B^2 \omega_K} (\hat{k}''' \times \hat{k}'')_{\parallel} (\hat{k}' \times (\hat{k}'' + \hat{k}'''))_{\parallel} \Xi(k', k'', k''') \\ \left(\frac{\omega'_{*}}{\omega_{k'}} - \frac{\omega_{*}}{\omega_k} \right) \langle \tilde{\phi}_k | \int \frac{dv f^0(v)}{\omega - \omega' - k_{\parallel} v} | \tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_{k''}, \tilde{\phi}_{k'''} \rangle$$

(B.21)

sous cette forme on voit que $V^{(3)}$ est purement imaginaire et proportionnel à $\langle \hat{D}(K'', \omega - \omega') \rangle$.

APPENDICE C

CALCUL D'INTEGRATION SUR LES ANGLES

Nous avons dans la partie principale du texte, à calculer l'expression

$$\iint d(\text{tg } \theta) d(\text{tg } \theta') \{n_k, n_{k''} - s_{k''} n_k n_{k'} - s_{k'} n_k n_{k''}\} \quad (\text{C.1})$$

il convient de considérer séparément les termes relatifs à une entrée d'énergie et à une sortie d'énergie.

1. PROCESSUS D'ENTREE D'ENERGIE

Nous avons dans cette catégorie le premier terme ainsi que les deux autres dans les cas $s_{k''} < 0$ et $s_{k'} < 0$. Pour ces termes l'intégration porte sur les angles θ et θ' , on vérifie que le mode k'' soit un mode instable en imposant la condition $0 < \text{tg } \theta'' < \text{tg } \theta_{\max}$, soit

$$0 < \frac{k \text{tg } \theta - k' \text{tg } \theta'}{k - k'} < \text{tg } \theta_{\max} \quad (\text{C.2})$$

dans le cas où l'on a $k - k' > 0$, cette condition est équivalente à restreindre l'intégration sur θ au domaine

$$\frac{k'}{k} \text{tg } \theta' < \text{tg } \theta < \frac{k'}{k} \text{tg } \theta' + \left(\frac{k-k'}{k}\right) \text{tg } \theta_{\max} \quad \text{tg } \varphi \quad (\text{C.3})$$

On observe qu'en permettant à $\text{tg } \theta'$ de varier entre 0 et $\text{tg } \theta_{\max}$ on a toujours $\text{tg } \varphi \leq \text{tg } \theta_{\max}$, le volume d'intégration est donc plus petit que le volume d'excitation des modes k et k' , on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') &= \int_0^{\operatorname{tg} \theta_{\max}} d(\operatorname{tg} \theta') \operatorname{tg}^{\varphi} d(\operatorname{tg} \theta) \\ &= \frac{k-k'}{k} \operatorname{tg}^2 \theta_{\max} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ce qui donne pour les processus d'entrée d'énergie :

$$\begin{aligned} \iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') n_k n_{k'} &= \frac{k-k'}{k} N(k') N(k'') \\ \iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') n_k n_{k'} &= \frac{k-k'}{k} N(k) N(k') \quad \text{si } s_{k''} < 0 \\ \iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') n_k n_{k''} &= \frac{k-k'}{k} N(k) (N(k'')) \quad \text{si } s_{k'} < 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Si $k' > k$ nous obtiendrons les résultats analogues en échangeant dans les coefficients les rôles de k et k' .

Processus de perte d'énergie

Ce processus ne concerne que les deux derniers termes de (C.1) lorsqu'on a $s_{k'} > 0$ et $s_{k''} > 0$.

Pour le premier d'entre-eux nous avons immédiatement

$$\iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') n_k n_{k'} = N(k) N(k') \quad \text{si } s_{k''} > 0 \quad (\text{C.6})$$

Pour le second, à cause du fait qu'on a $N_{k''} = 0$ pour $\operatorname{tg} \theta'' > \operatorname{tg} \theta_{\max}$ on doit faire le même test que pour un processus d'entrée et on obtient :

$$\iint d(\operatorname{tg} \theta) d(\operatorname{tg} \theta') n_1 n_{k''} = \frac{k=k'}{k'} N(k) N(k'') \quad \text{si } s_{k'} < 0 \quad (\text{C.7})$$

R E F E R E N C E S

- (1) D.BOHM, E.H.S.BURHOP, H.S.W.MASSEY and R.W.WILLIAMS,
The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic
Fields (Mc Graw Hill Book Company, New York, 1949)
- (2) Yu.A.TSERKOVNIKOV, Soviet.Phys. JETP, 5, 58 (1968)
- (3) L.I.RUDAKOV and R.Z.SAGDEEV, Soviet.Phys. JETP, 10, 952
(1960)
L.I.RUDAKOV and R.Z.SAGDEEV, Soviet.Phys.Doklady, 6, 415
(1961)
- (4) B.B.KADOMTSEV and A.V.TIMOFEEV, Soviet.Phys.Doklady, 7,
826 (1963)
- (5) A.A.GALEEV, V.N.ORAEVSKY and R.Z.SAGDEEV, Soviet.Phys. JETP
17, 615 (1963)
- (6) A.B.MIKHAILOVSKY and L.I.RUDAKOV, Soviet.Phys. JETP, 17,
621 (1963)
- (7) B.B.KADOMTSEV, Soviet.Phys. JETP, 16, 871 (1963)
- (8) A.A.GALEEV and L.I.RUDAKOV, Soviet.Phys. JETP, 18, 444 (1964)
- (9) A.A.GALEEV and R.Z.SAGDEEV, Lectures on the non-linear
theory of plasma, Rapport JC/66/44 Trieste (1966)
- (10) N.A.KRALL and M.N.ROSENBLUTH, Phys.Fluids, 8, 1488 (1965)
- (11) L.D.PEARLSTEIN and H.L.BECK, Phys.Rev.Letters, 23, 220 (1969)
- (12) B.COPPI, G.LAVAL, R.PELLAT and M.N.ROSENBLUTH, Nucl.Fusion,
6, 261 (1966)
- (13) P.H.RUTHERFORD and E.A.FRIEMAN, Phys.Fluids, 10, 1007 (1967)
- (14) J.N.DAVIDSON and T.KAMMASH, Nucl.Fusion, 8, 203 (1968)
- (15) G.LAVAL, R.PELLAT et Tu KHIET, C.R.Acad.Sciences, t.266,
p.161-164 (1968)

- (16) B.COPPI, G.LAVAL, R.PELLAT et Tu KHIET, Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, p.795, International Atomic Energy Agency, Vienna (1969)
- (17) M.N.ROSENBLUTH, KRALL and ROSTOKER, Nucl.Fusion, Supp. part.1, 143 (1962)
- (18) B.B.KADOMTSEV, Plasma Turbulence, Acad.Press.London (1965)
- (19) A.A.GALEEV, V.I.KARPMAN and R.Z.SAGDEEV, Nucl.Fusion, 5, 20 (1965)
- (20) LANDAU et LIFSHITZ, Electrodynamics of Continuas Media Pergamon Press, London, p.256 (1960)
- (21) P.E.STOTT, P.F.LITTLE and J.BURT, Phys.Rev.Letters, 25, 996 (1970)

o o
o

